

# 1 はじめに

ERLを用いた放射光源 [1] は、貯蔵リング型放射光源とは根本的に異なる特徴を有している。通常の貯蔵リング型光源では、放射光発生に伴う放射励起・減衰の釣り合った平衡状態でエミッタンスが決まるが、一方 ERL (図 1) では、電子銃から生成されたビームは 1 回 (あるいは数回) のみ挿入光源を通過し、ビームダンプに捨てられるため、ビームは平衡状態に到達せず、入射器で生成されたビームの質が放射光の質を決定付けるという根本的な違いがある。上記の特徴から、ERL 入射器の性能次第で、原理的に平衡状態に依らない超低エミッタンスビームやフェムト秒パルス光を実現可能であり、放射光科学や物質構造科学、構造生物学にブレイクスルーをもたらすことが期待されている。ERL 光源では、超低エミッタンスや超短パルス光の他に、非常に高い (既存の貯蔵リングに比べて 2 桁高い) 平均輝度、空間干渉性の良い放射光、そして高い繰り返し周期を実現可能である。このように、貯蔵リング型光源を凌駕する先進性が ERL 光源の大きな特徴である。現在日本では、KEK、JAEA を中心として日本の研究機関が協力して、ERL 型光源の実証機 CERL の設計研究が進められている [1]。

入射器でのビームの質を向上させれば放射光の質を向上させられるということは、逆に言えば、入射器で如何に超低エミッタンスビームを生成し、増大させずに挿入光源まで輸送するかということが、ERL 光源用入射器での最大の課題であるということを示している。特に、100 mA (繰り返し 1.3 GHz で 1 バンチあたり 77 pC) の大電流で 0.1 mm mrad という超低エミッタンスビームを入射器で生成・輸送するというのは挑戦的な課題であり、大型の GeV クラスの ERL 光源を実現するためには、実証しなければならないテーマである。

超低エミッタンスビームを生成する上で克服しなければならない物理現象は、空間電荷効果とコヒーレント放射 (CSR) によるビーム品質の低下である (図 2)。空間電荷効果はビーム内電子間での Coulomb 力によるものであり、10 MeV 程度の低いビームエネルギーをもつ入射器内では、全体に渡ってその影響を考慮しなければならない。一方、CSR は合流部のビーム軌道が曲げられる箇所でのみで問題となるが、合流部での分散関数を通してビームの質を低下させる可能性がある。これらの効果は、単純化されたモデルでは解析的に取り扱えるが、現実のバンチ化さ

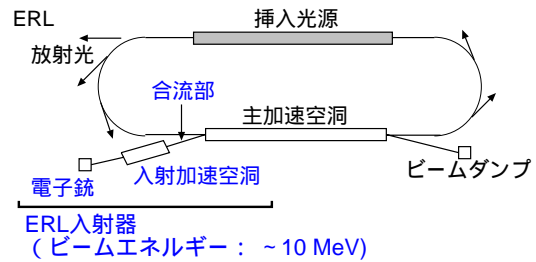


図 1: ERL の概略図。電子銃、加速空洞から構成される入射器、主加速空洞、周回部、ビームダンプによって構成される。入射器でのエネルギーは、またほぼビームダンプに捨てるビームのエネルギーとなる。このため、入射器のエネルギーが、捨てるビームの全出力を決めることになるため、増大させると放射線遮蔽の問題が厳しくなる。

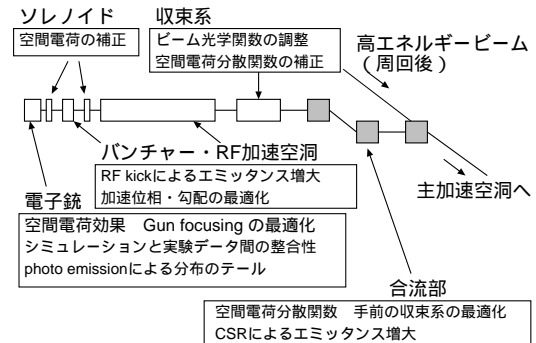


図 2: ERL の入射器で重要となる物理現象。ただし、光電陰極電子銃でのレーザー整形などは除く。

れたビームでは、空間電荷力の非線形性や加速電磁場の時間依存性などのため、解析的な扱いが困難である。このような事情から、主に数値計算による方法が用いられている。

本テキストでは<sup>1</sup>、ERL 入射器を例として、空間電荷効果などの集団効果が顕著に現れるエネルギー領域での電子ビームの物理について紹介する。放射光源用の GeV クラスの電子貯蔵リングでは、電子ビームの運動は空間電荷効果による効果を無視して単粒子的に扱い、必要に応じてビーム不安定性などの集団効果を取り入れるという方法が取られる。一方、ERL 入射器ではビームのエネルギーが低く、また電荷密度も高いために、空間電荷効果の影響が支配的になり、そもそも、単粒子的な取り扱いができ

<sup>1</sup>2008 年 8 月 22 日版。テキストは随時更新していく予定なので、最新版については、OHO セミナーの web ページを参照して欲しい。

ない。このために、入射器中での電子ビームの物理は複雑になりがちである。現実の入射器の設計では、上流の要素の影響が下流に波及していくため、ビームダイナミクスを考える際には入射器全体を取り扱う必要があり、多くの場合は数値計算による方法が採用されている。しかし、入射器を構成する各要素毎に電子ビームの物理を考え、その基本を抑えておくことは、数値計算を行う上でも重要である。

ここでは、電子ビームの物理をできるだけわかりやすく紹介しようと試みた。ERL入射器では、単粒子についての相対論的な運動方程式から始めて、それをビームエンベロープ方程式に拡張し、空間電荷効果を取り入れるというアプローチをとる。円形加速器中でのビームダイナミクスの物理では、曲線座標系での単粒子の運動から始めて、Courant-Snyderパラメタと呼ばれるビーム光学関数を考える方法が一般的な流れであるが、ここではその解説はしないで、入射器でのビーム物理を考える上で便利なアプローチをとることにした。本テキストの中でも、ビーム光学関数が出てくるが、それらについては、原田氏の講義や他の参考文献 [2, 3] を参照して欲しい。

ここでは、まず対象とする ERL 入射器についてセクション 2 で紹介し、電子ビーム中で重要となる物理現象についてセクション 3 で紹介する。このなかで、特に重要となるのが空間電荷効果である。セクション 4 では、空間電荷効果による影響を評価する準備として、近軸光線近似を用いたビームエンベロープ方程式を導出し、空間電荷効果がない場合の外部から加えた電磁場に対する影響を紹介する。セクション 5 では、円筒対称性をもつビームに対して空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式を導出する。ここで紹介する空間電荷効果についての議論の多くは、参考文献 [4, 5] を参考にしている。セクション 6 ではビームエンベロープ方程式を拡張して、空間電荷効果によって投影エミッタンスが増大する様子を調べる。セクション 7 では、空間電荷効果を含んだビームシミュレーションについて紹介し、電子銃ビームライン、CERL 入射器ビームラインについての計算結果を紹介する。セクション 8 では、合流部で問題となる物理について概観する。

本テキストでは、ERL 入射器を例にとり、線形加速器中での空間電荷効果の影響を取り扱っている。加速器を幾何学的に分類すると、ERL 入射器のような 1 回のみビームが通過する加速器の他に、シンクロトロンと呼ばれる円形加速器がある。円形加速器では線形加速器と異なり、運動が周期条件下で行わ

れるという大きな違いがある。円形加速器中では、空間電荷効果による重要な影響としてチューンシフトと呼ばれる現象があるが、ここではそれについては取り扱わない。過去の OHO'2000 の町田慎二氏によるテキスト [6] を参照して欲しい。また、多くの有用な文献については、巻末にまとめたので参照していただきたい。

## 2 ERL 入射器

ERL 入射器の役割は、大電流、短バンチ長かつ低エミッタンスを持つビームを生成し、主加速空洞まで輸送することである。ERL 入射器は、電子銃、ソレノイド、バンチャー、超伝導 RF 加速空洞、合流部から構成される。電子銃としては、光陰極カソードを用いた DC 電子銃、あるいは RF 電子銃が有力な候補である。ここでは、これらの要素についての紹介する。

### 2.1 電子銃

ERL 入射器の性能を決定する上で、最も重要な要素は電子銃である。電子銃で品質の良いビームを生成できなければ、それ以降の要素でいくら品質を維持するようにしても、初期の品質以上にはできないからである。電子銃の開発では、光陰極表面での電子の生成の物理、高い加速電圧の実現、高い量子効率の実現、カソード表面の長寿命化など非常に多くの開発課題がある。

ERL 入射器用の電子銃として現在有力なのは、光陰極カソードを用いた DC 電子銃である。光陰極カソードの材質としては、NEA 表面を持つ GaAs あるいは、GaAsP などが有力な候補である。電子銃での重要な物理現象として、光陰極表面での電子の生成や、空間電荷効果、カソード表面での鏡像電荷の効果などがある。電子を生成する際には、パルス状のレーザーをカソード表面に当てて電子を生成するが、そのパルス形状と横方向の分布形状が、空間電荷効果の影響を小さくする上で重要であることがわかっている。言い換えると、空間・時間両方向についてのレーザー分布の整形が低エミッタンスを得る上では重要となる。実際に時間方向と横方向のレーザー分布の形状を整形する技術は幾つか提案されているが、より低エミッタンスビームを実現するには、さらなる技術開発が重要となる。ERL の実現のためには、電子銃の開発が非常に重要な役割を担っているが、ここでは「ERL 入射器でのビームの物理」を主なテーマとしており、また本セミナーでは「電子銃」についての講義もあるため、電子銃の詳細については触れない。電子銃については、西森氏の講義で詳しく紹介されると思うので、そちらを参照して欲しい。また多くの有用な文献 [7, 8] もあるので、そちらも参照していただきたい。

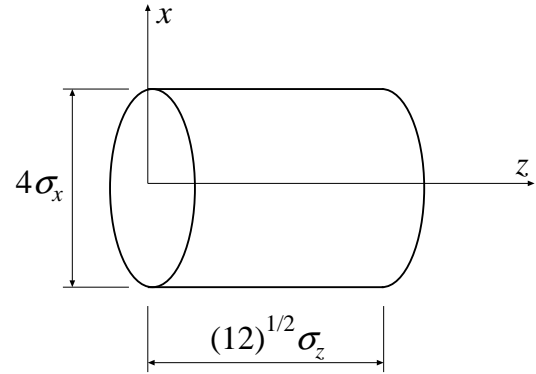


図 3: ピア缶型の粒子分布。円筒内では電荷密度は一定。 $\sigma_x$  は  $x$  方向の rms ビームサイズ、 $\sigma_z$  は  $z$  方向の rms バンチ長。

ERL 入射器のシミュレーションを行う際には、電子銃のカソード表面で電子がある分布をもって生成されると仮定して、粒子トラッキングが開始される。現実の電子銃ではどのような分布で電子が生成されるかを知ることは、計算機シミュレーションの精度を上げるためにも重要である。特に、光陰極電子銃では、熱電子銃とは異なり、レーザーの波長や取り出す電荷量に依存するために複雑である。電子銃の研究では、これらの測定も精力的に行われている [9, 10]。

電子銃から生成されたビームに対してのエミッタンス測定から、カソード表面の温度を定義して、それを推測することができる。まず、簡単のために熱電子銃のカソード表面で温度  $T$  を持つ場合のエミッタンスを考えると、

$$\varepsilon_x = \sigma_x \sqrt{\frac{k_B T}{m c^2}} \quad (2.1)$$

と計算される [7, 4]。ここで、 $k_B$  は Boltzmann 定数、 $m$  は電子の質量、 $c$  は真空中での光速である。 $\sigma_x$  はカソード表面での  $x$  方向の rms ビームサイズである。これより、熱エミッタンスは温度と初期ビームサイズに依存することがわかる。式 (2.1) から、電子銃の後ろでエミッタンスが測定できれば、カソードに当てたレーザースポットサイズから、温度  $T$  を推測することができる。ERL 計画が進められているコーネル大学では、光陰極 DC 電子銃のテストビームラインで、GaAs カソード、GaAsP カソードについての熱エミッタンスの測定が行われ、カソードでの  $k_B T$  の値が計測されている [9, 10]。

また、ERL 入射器で実現可能な最小エミッタンス

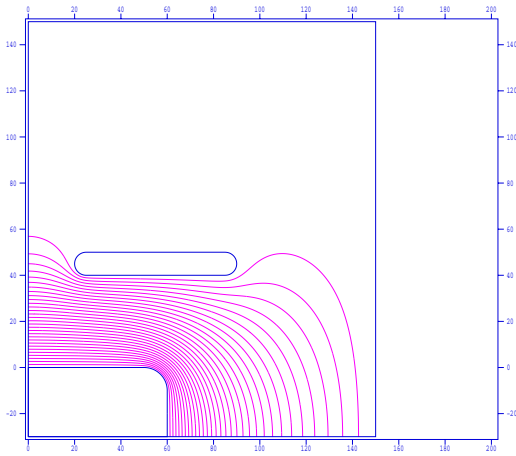


図 4: 電子銃の断面形状。横軸は  $x$  軸、縦軸は  $z$  軸を表す。図は、 $z$  軸周りに円筒対称性がある場合の断面の半分を示す。カソード（下側の円筒）からアノード（穴の開いた平板）に向かって、加速電場が形成される。

を調べるために、初期の電子分布の形状を変化させ最適な分布を探す研究も行われている [11]。多くの場合には、ピア缶型の分布 (図 3) が初期分布として用いられているが、横方向の分布で中心分布の密度を下げた場合の方が、より空間電荷効果の影響を小さく抑えられることがわかっている [8]。

図 4 に JAEA-type の光陰極 DC 電子銃の断面形状を示す。カソード・アノード間のギャップは 40 mm である。ここで、電子銃は  $z$  軸の周りに円筒対称性を持つとして、半分の断面を示した。図 5 に  $z$  軸上での加速電場  $E_{z0}(z)$  を示す。対称性から、 $z$  軸上では半径方向の成分  $E_r$ 、円周方向の成分  $E_\theta$  とともにゼロとなる。しかし、 $z$  軸上から離れた場合 ( $r \neq 0$ )、 $E_r$  はゼロにはならない。より詳細な計算では、2次元の電場のマップが必要になるが、 $z$  軸近傍では  $E_{z0}(z)$  から  $E_r$  を求めることができる。 $z$  軸上の電場  $E_{z0}(z)$  を用いると、 $z$  軸近傍で、 $r \neq 0$  の場合の電場の成分は、

$$E_z(r, z) = E_{z0}(z) - \frac{1}{4}r^2 \frac{\partial^2 E_{z0}(z)}{\partial z^2}, \quad (2.2)$$

$$E_r(r, z) = -\frac{1}{2}r \frac{\partial E_{z0}(z)}{\partial z} \quad (2.3)$$

と表すことができる。これは、横方向の電場  $E_r$  は  $\partial E_{z0}(z)/\partial z$  に依存することを示している。図 5 に示したように、 $\partial E_{z0}(z)/\partial z > 0$  となるため、負の電荷を持つ電子ビームには発散力が働くことになる。

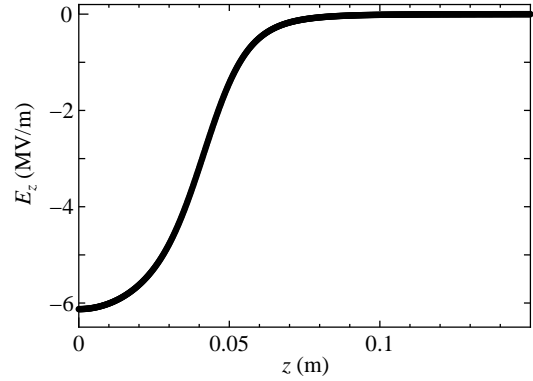


図 5: 電子銃 (図 4) が  $z$  軸上に作る加速電場。 $z$  軸周りの円筒対称性があるため、 $z$  軸上では  $E_z$  成分のみとなり、 $E_r$  および  $E_\theta$  はゼロとなる。 $z = 0$  (m) がカソード表面、 $z = 0.04$  (m) がアノード表面。

ERL 入射器のシミュレーションでは、空間電荷効果を含んだコードが使われるが、取り入れる物理現象と要求する精度によって、外部電磁場の与え方が異なってくる。高速に計算したい場合には、円筒対称性を持つビームを仮定し、ビーム進行方向 ( $z$  軸) の近傍での運動を考え、上記のような 1 次元の外部電磁場を使用する。しかし、 $z$  軸近傍での電磁場の展開が正しくない (ビームサイズが大きい場合)、あるいはより正確に電子銃の作る電場の影響を取り入れるには、2次元、あるいは 3次元の電場分布を与える必要がある。

## 2.2 ソレノイド

ERL 入射器では、電子銃の直後にソレノイド電磁石が設置される。ソレノイド電磁石が作る磁場には、セクション 4.3 で示すようにビームに収束力を与え、またビームの ( $x$ - $y$ ) 断面での分布を回転させるという働きがある。ソレノイドの役割は、電子銃の電場と空間電荷効果により発散したビームサイズを収束効果により小さくするという他に、セクション 6 で示すような投影エミッタンスを補償するということである。ERL 入射器では、多くの場合、電子銃下流とバンチャー空洞下流にソレノイドを設置する案が採用されている。

JAEA の光陰極 DC 電子銃で用いられている 1 番目のソレノイド電磁石の断面を図 6 に示す。電磁石は円筒対称性を持つため、断面の半分を示した。図 7 に  $z$  軸上の磁場分布  $B_{z0}(z)$  を示す。電子銃との位

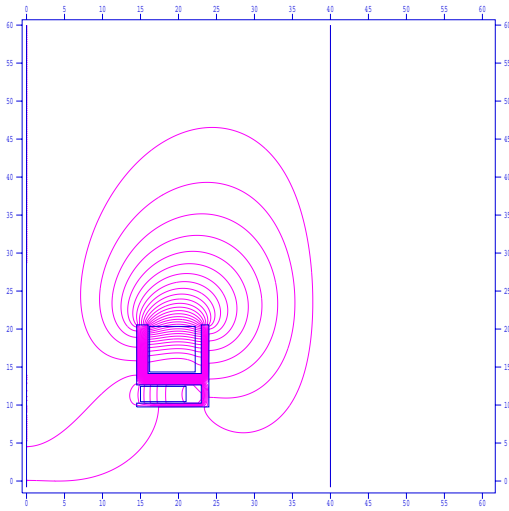


図 6: ソレノイド (JAEA-type) の断面形状。横軸は  $x$  軸、縦軸は  $z$  軸を表す。図は、 $z$  軸周りに円筒対称性がある場合の断面の半分を示す。 $z = 0$  の位置が電子銃のカソード表面となる。カソード表面での磁場をゼロにするために、主コイル以外に補正コイルが用いられる。

置関係は、 $z = 0$  が電子銃のカソード表面に対応する。このソレノイド電磁石は、主コイルの他に、カソード表面での磁場をゼロにするための補正コイルを持っている。もし、カソード表面で有限の磁場がある  $B_{z0}(z=0) \neq 0$  とすると、カソードで表面で生成された電子ビームは、セクション 4.2 の式 (4.20) で示すように、有限な初期の横方向運動量  $p_\theta$  を持つことになり、初期エミッタンスの増大を招く。これを避けるために、補正コイルを使用して、カソード表面での磁場をゼロに調整している。

電子銃の電場の議論のときと同様に、ソレノイド磁場の 1 次元分布  $B_{z0}(z)$  から、2 次元磁場分布を計算することができる。 $z$  軸近傍では、 $B_{z0}(z)$  から  $r \neq 0$  の場合の磁場成分は、

$$B_r(r, z) = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_{z0}(z)}{\partial z}, \quad (2.4)$$

$$B_z(r, z) = B_{z0}(z) - \frac{1}{4} r^2 \frac{\partial^2 B_{z0}(z)}{\partial z^2} \quad (2.5)$$

と計算される。

### 2.3 バンチャー空洞

光陰極電子銃では、パルス状のレーザーを導入して、バンチ化された電子ビームを生成する。しかし、

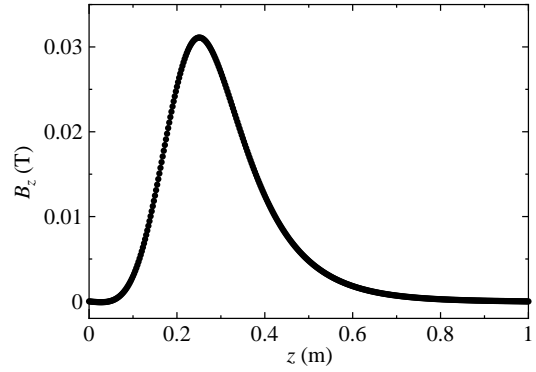


図 7: ソレノイド (図 6) が  $z$  軸上を作る磁場  $B_z$ 。 $z$  軸周りの円筒対称性があるため、 $z$  軸上では  $B_z$  成分のみとなり、 $B_r$  および  $B_\theta$  はゼロとなる。

カソード直後ではビームのエネルギーが低いために、空間電荷効果の影響が強く働き、ビームは進行方向の発散力によって引き伸ばされる。ERL では、短いバンチ長の電子ビームが要求されるため、引き伸ばされた電子バンチを再度圧縮する必要がある。それを行うのが、電子銃の後に設置されるバンチャー空洞である。バンチャーの役割は、電子銃で生成され、加速されたビームのバンチ長を短くすることである。この詳細については、セクション 4.5 で紹介する。

コーネル大学の ERL 計画で使用されるバンチャー用空洞の 1 次元電場分布  $E_{z0}(z)$  を図 8 に示す。系に円筒対称性を仮定した粒子トラッキングコードでは、電磁場として、 $z$  軸上の電場  $E_{z0}(z)$  のみが入力データとして与えられる。これは、 $z$  のみ依存する関数で、時間依存は含まない。この場合、 $E_{z0}(z)$  に時間依存を付け加えた  $E_z(z, t)$  から、 $z$  軸近傍での他の電磁場の成分を求めることができる。 $z$  軸上で半径方向  $r$  および円周方向  $\theta$  の成分は一定であると仮定して、 $E_z(z, t)$  を Maxwell 方程式に代入すると、 $z$  軸の近傍、すなわち  $r$  が小さい場合には、半径方向の電場  $E_r(z)$  および円周方向の磁場  $B_\theta(z)$  は

$$E_r(z, t) = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_{z0}(z, t)}{\partial z}, \quad (2.6)$$

$$B_\theta(z, t) = \frac{r}{2c^2} \frac{\partial E_{z0}(z)}{\partial t} \quad (2.7)$$

と与えられる。ここでは、 $r$  について展開した後に、 $r$  についての 1 次の項のみを残している。TM モードの電磁場の場合、 $z$  軸近傍では電磁場の成分は、

$$E_z(r, z) = E_{z0}(z) \cos(\omega t + \phi), \quad (2.8)$$

$$E_r(r, z) = -\frac{1}{2} r \frac{\partial E_{z0}(z)}{\partial z} \cos(\omega t + \phi), \quad (2.9)$$

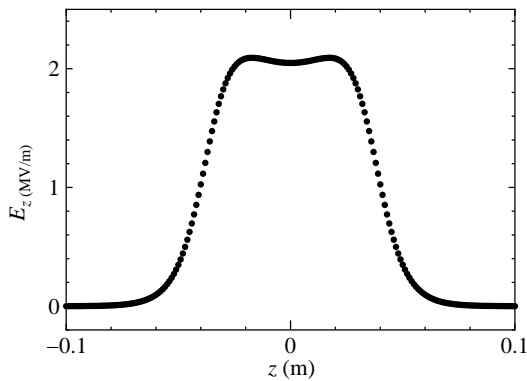


図 8: シングルセル・バンチャー空洞内での  $z$  軸上の加速電場。  $z$  軸周りの円筒対称性があるため、  $z$  軸上では  $E_z$  成分のみとなり、  $E_r$  および  $E_\theta$  はゼロとなる。

$$B_\phi(r, z) = \frac{r\omega}{2c^2} E_{z0}(z) \sin(\omega t + \phi) \quad (2.10)$$

と計算される。ここで、  $\omega$  は電磁場の角振動数、  $\phi$  は初期位相である。このように、円筒対称性がある系では電場の 1 次元分布  $E_{z0}(z)$  から、他の成分も求めることができる。ただし、上記の展開は、  $r$  が小さい時のみ有効であり、ビームサイズが大きい場合などには、2 次元、3 次元の電磁場の分布が必要となる。

## 2.4 超伝導加速空洞

ERL では、入射器用空洞および周回部用空洞には、超伝導加速空洞 (Super conducting RF Cavity) が使用される。超伝導空洞が必要な理由は、連続波 (CW) で大電流ビームを加速し、また高い加速勾配を得るためである。RF 電磁場の周波数は、1.3 GHz (L-band) が使用される。CERL 計画では、入射器内に 3 台の 2 セル空洞を設置することで設計が進められている。

入射器用加速空洞の役割は、電子銃で生成した大電流ビーム (100 mA) を 10 MeV 程度まで加速することである。周回部の加速空洞はエネルギー回収を行うが、入射器用空洞ではエネルギー回収が行われないため、加速に必要なパワーは全て外部の RF 源から供給されなければならないという大きな違いがある。このため、RF パワーを空洞に入力する結合器 (カップラー) は大電力に対応したものが必要となる。入射器用空洞での開発課題としては、

- 250 kW 級の大電力を投入可能な入力カップラー

- 100 mA の連続運転 (CW 運転) に対応した HOM カップラー
- エミッタンス増大を起こさない加速器の設計とその実現

というようなことがある [1]。リニアコライダー用の空洞開発の経験からは、30 MV/m の加速勾配の達成は十分可能であると報告されているが、加速勾配を 20 MV/m 程度に下げて、位相や加速勾配などの運転パラメタの自由度を確保した方が、低エミッタンスを実現する上で有利と考えられる。

ERL 入射器内でのビームダイナミクスを考えたとき、RF 空洞は投影エミッタンスへの影響を与える要素の一つである。セクション 4.4 で紹介するように、RF 電磁場によってバンチ化されたビームの投影エミッタンスの増大が引き起こされる可能性がある。また、RF 電磁場の非線形性によってもエミッタンスの増大が引き起こされる。入射器空洞の RF 電磁場によるこれらの影響を極力抑えるために、空洞の運転パラメタである加速勾配と位相の調整が必要である。これが、最大加速勾配を下げて、自由度を確保した方が良いと考える理由である。

現実には、RF 電磁場による影響は、空洞に入ってくるビームの初期条件 (分布やタイミング) によって影響され、また 3 台の加速空洞を調整する必要があるため、最適化すべきパラメタの数が多くなる。このため、パラメタ調整は計算機シミュレーションによって、入射器全体のパラメタに対して行われる。

図 9 に CERL 計画用の入射器加速空洞の断面図を示す。加速空洞は、2 つのセルを持つ。図 10 に、 $z$  軸上での加速電場  $E_{z0}(z)$  を示す。この  $E_{z0}(z)$  を用いると、バンチャー空洞の場合と同様に、電磁場の分布は式 (2.8)、(2.9)、(2.10) によって表される。

## 2.5 4 極電磁石によるマッチング部

ERL 入射器では、入射器用加速空洞の後に、ビーム光学関数調整用に複数の 4 極電磁石が設置される。この部分をマッチング部と呼ぶ。CERL 計画では、5 台の 4 極電磁石が設置される予定である。これらの 4 極電磁石の役割は、ビームサイズを調整するだけでなく、この後に続く合流部での分散関数とエネルギー拡がりによる投影エミッタンスの増大を避けるために、ビーム光学関数を調整することである。

電子銃から加速空洞までは、基本的に円筒対称性を持つ要素であったが、4 極電磁石は円筒対称性を

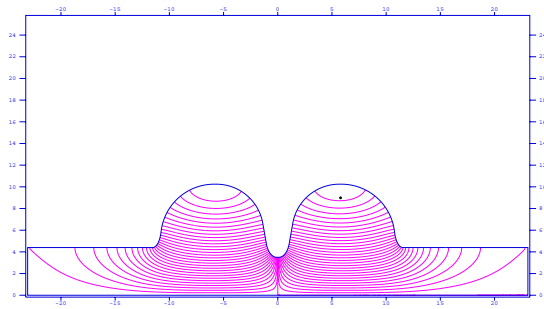


図 9: 2セル空洞からなる超伝導加速空洞の断面形状。横軸は  $z$  軸、縦軸は  $x$  軸を表す。図は、 $z$  軸周りに円筒対称性がある場合の断面の半分を示す。

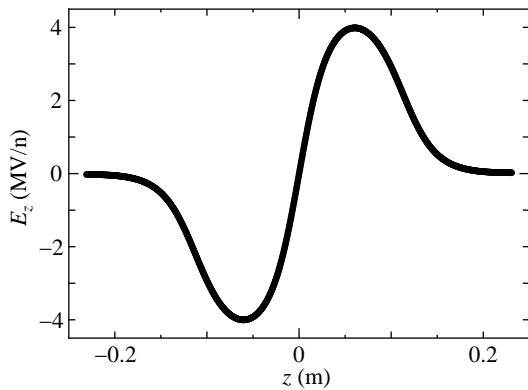


図 10: 超伝導加速空洞 (図 9) が  $z$  軸上を作る加速電場  $E_z$ 。  $z$  軸周りの円筒対称性があるため、 $z$  軸上では  $E_z$  成分のみとなり、 $E_r$  および  $E_\theta$  はゼロとなる。

もっていない。従って、マッチング部ではビームの円筒対称性が崩れることになる。

## 2.6 合流部

合流部は、ERL 入射器からの低エネルギービームを、周回部からきた高エネルギービームと合流させる部分である。合流部は、一般に 3 つあるいは 4 つの偏向電磁石から構成される [12]。図 11 にコーネル大学 ERL 計画での合流部のレイアウトを示す。3 つの偏向電磁石と 2 つの 4 極電磁石から構成される。4 極電磁石は、合流部出口で分散関数がゼロとなるように調整される。また、4 極電磁石を含まない形式の合流部では、偏向電磁石の端の形状を調整し、そこでの収束力を利用して分散関数をゼロにするように設計される [1]。図 12 に、CERL 計画で検討されている合流部での分散関数を示す。CERL の合流部で

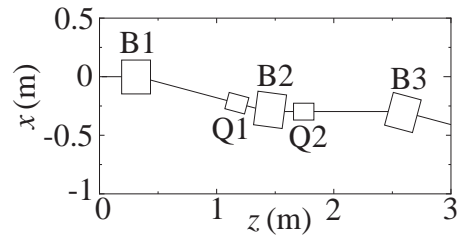


図 11: コーネル大学 ERL 計画の合流部のレイアウト。矩形偏向電磁石 3 台と、4 極電磁石 2 台から構成される。

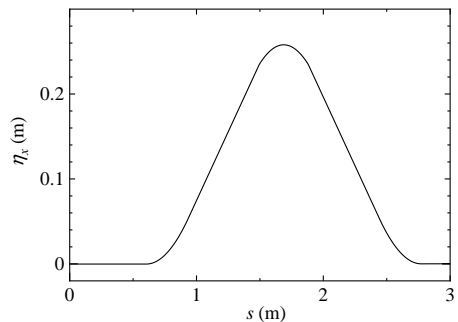


図 12: CERL の合流部での分散関数 (4 極電磁石を含まない場合)。合流部出口で分散関数がゼロになるように、偏向電磁石の端部形状が調整されている。

は、図 11 の合流部とは違い 4 極電磁石は含まれていない。その代わりに、偏向電磁石の端部の形状を調整し、出口で分散関数をゼロにしている。

合流部で問題となる物理現象は、縦方向空間電荷力とコヒーレント輻射 (Coherent Synchrotron Radiation, CSR) によるエネルギー拡がりの増大である。分散関数がゼロでない部分でエネルギー拡がりが増大すると、分散関数を通して投影エミッタンスの増大が引き起こされる。しかし、縦方向空間電荷力、あるいは CSR による投影エミッタンスの増大は、合流部手前のマッチング部でビーム光学関数を調整することにより、最小に抑えることが可能であることが示されている [13, 14]。

基本的に、合流部はその内部に 4 極電磁石を設置しない限り、一度設計してしまうと自由に調整できるパラメタがない。このため、合流部から下流でのビームの質は、合流部手前のマッチング部のパラメタによって左右される。

### 3 電子ビーム中の物理

荷電粒子からなるビームは、電磁場による相互作用を通して、さまざまな影響を受ける。ここでは、これらの相互作用を取り上げ、今回テーマとしている ERL 入射器中の電子ビームを支配する物理を紹介する。ただし、ビームの集団効果に起因するビーム不安定性については、ここでは触れない。それらについては、他の文献 [15, 1] を参照して欲しい。

#### 3.1 電磁場中の荷電粒子の運動方程式

ビームとは、単一の種類の粒子（電子や陽子など）、あるいは複数の種類の粒子が、ほぼ同じ速度を持って同一方向に進行する集団であると考えられる。加速器中では、ビームは外部から加えられた電磁場から力を受けることになる。電磁場中での荷電粒子の運動の基本方程式は、Maxwell 方程式、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$\mathbf{D}$ と $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ の関係式、

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (3.6)$$

電荷の連続の方程式、

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (3.7)$$

および運動方程式、

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \beta c) = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.8)$$

である。加速器中での荷電粒子の運動を考えるとときには、これらの運動方程式に外部から与えられた電磁場、あるいは荷電粒子間の相互作用など加えて、記述することができる。

#### 3.2 ビームを支配する物理

ビームを支配する物理として、以下のようなことが考えられる [16]。

1. 外部から加えた静電場・静磁場からの電磁力

2. 外部から加えた動電場・動磁場からの電磁力

3. 粒子間の Coulomb 相互作用（空間電荷効果）

4. ビーム自身が生成する電磁場（航跡場）

5. 偏向場による放射光の発生（放射減衰、CSR）

6. 放射光の量子化（放射励起）

7. 他のビームが作る電磁場（ビーム・ビーム相互作用）

8. 残留ガスとの散乱、イオン捕獲

9. 光電子による電子雲との相互作用

ERL 入射器で考慮すべき相互作用は、上記の物理から、ビーム・ビーム相互作用と光電子による電子雲との相互作用を除いたものである。ERL 入射器を設計する際に、まず重要となる相互作用は、これらの中でも、静電磁場による力、動電磁場による力、そして空間電荷効果の3つである。入射器ではビームのエネルギーが低いために、まずこれらの効果が支配的となる。より現実的な状況を考える場合には、航跡場やイオン捕獲の影響を導入する必要があるが、ERL 入射器の設計にあたっては、基本的に上記の3つの効果を考えれば良い。また、合流部での影響を考慮するときには、上記の3つの効果に加えて CSR による影響を考慮する必要がある。

現在放射光源として用いられている、GeV 程度のエネルギーの放射光ストレージリングでは、ERL 入射器とは異なり、通常空間電荷効果は無視され、多くの場合ビームは単粒子的に取り扱われる。では、どうして荷電粒子の集まりであるビームの中で、粒子間の Coulomb 相互作用を無視することが可能になるか？まずは、円筒対称性をもつ連続ビームを例にしてこのことを考えてみる。

#### 3.3 空間電荷効果は無視できるビームエネルギー

粒子間の Coulomb 相互作用がビーム中ではどのようなか、次のような簡単なモデルに対して考える。 $z$  方向に一様かつ連続なビームが、 $z$  軸上を速度  $v_z$  で移動しているとする。ここで、ビームの断面は半径  $r$  の円であると仮定する。また、電荷密度はビーム内で一様であるとする ( $\rho_0 = \text{const.}$ )。このとき、ビームが作る電場、磁場も円筒対称性をもつ。さ



らに、 $z$  軸方向の連続ビームとしたため、電場、磁場の  $z$  方向成分は zero となり、 $E_r$ 、 $B_\phi$  のみが残る。Gauss の法則より、半径方向の電場は次のように与えられる。

$$E_r(r) = \frac{1}{2\epsilon_0}\rho_0 r \quad (3.9)$$

次に、Ampere の法則を用いて、円周方向の磁場成分を求める。電流密度は一様と仮定しているため、電流密度は次のように与えられる。

$$j = \rho_0 v \quad (3.10)$$

これを用いると磁場は、

$$B_\phi = \frac{1}{2}\mu_0\rho_0 v r \quad (3.11)$$

となる。このような  $E_r$ 、 $B_\phi$  内での荷電粒子が受ける力は、Lorentz 力より次のように与えられる。

$$\begin{aligned} F_r &= e(E_r - vB_\phi) \\ &= e\left[\frac{1}{2\epsilon_0}\rho_0 r - \frac{1}{2}\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\rho_0 v^2 r\right] \\ &= e\frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{e}{\epsilon_0}\frac{\rho_0}{\gamma^2}r \end{aligned} \quad (3.12)$$

ここで、Lorentz 因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.13)$$

$\beta = v/c$ 、 $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$  を用いた。式 (3.12) より、ビーム内の荷電粒子が受ける力は、 $1/\gamma^2$  に依存することがわかる。高エネルギービーム、すなわち、 $\gamma$  が十分大きい場合には、ビーム内での Coulomb 相互作用を無視することができる。 $\gamma$  はビームの運動エネルギーを  $E_0$  とすると、

$$E_0 = (\gamma - 1)mc^2 \quad (3.14)$$

と表される。例えば  $E_0 = 2.5$  GeV の場合、 $1/\gamma^2 = 4.2 \times 10^{-8}$  と十分小さい値となり、ビーム内での Coulomb 相互作用も小さくなることからわかる。一方、ERL 入射器では、 $E_0 \sim 10$  MeV 程度であり、ビーム内での Coulomb 相互作用を無視することができない。

以上のように簡単なモデルから、空間電荷効果のエネルギー依存性を調べ、高エネルギービームの場合には、その影響が十分小さくなることを示した。このことから、GeV クラスの放射光貯蔵リング等では、

空間電荷効果の影響を無視することができる。同様の結果は、ビームの静止系で Coulomb 力による電場を計算し、ビームが動いて見える実験室系に Lorentz 変換しても得られる。

空間電荷効果の影響がどの程度であるかを見る上では、セクション 5.1 で紹介するデバイ長を用いて、より詳細に議論する。

### 3.4 バンチ化されたビーム

ビーム (beam) には、光線といった意味や、建築物での梁という意味があり、連続して連なったものというイメージとなるようである。加速器でいうビームとは、単一の種類の粒子 (電子や陽子など)、あるいは複数の種類の粒子が、ほぼ同じ速度を持って同一方向に進行する集団であると考えられる。加速器でビームというときには、進行方向に集団で運動するということを指しているといえる。このため、粒子の分布が進行方向に一様に連続であるか、あるいは塊になっているかには関係なく、ビームという言葉を使っている。ERL での電子ビームは、進行方向に対してもある塊となっており、これをバンチと呼ぶ。本テキストでは、バンチ、あるいはバンチ化されたビームという表現を、粒子分布がある大きさを持っていることを強調するときに使う。セクション 5.3 で、空間電荷効果を含んだ相対論的な場合のビームエンベロープ方程式を求める際には、簡単のために、バンチ化されていない進行方向に一様なビームを考える。これに対して、投影エミッタンスの増減を考える際には、ビームエンベロープ方程式を拡張して、バンチ化された影響を電流分布の進行方向に対する依存性として取り入れる。

ERL では短いパルス幅を持つ光を生成するために、バンチ長を短くすることが要求される。また、加速空洞でビームを加速する際には、ある程度短いバンチ長が必要とされる。これは、RF 電磁場による加速では、電磁場が時間とともに変化するため、バンチ長が有限である場合には、バンチ内での位置によってエネルギー差が生じるためである。入射器で要求されるエネルギー拡がりは、1%程度であるので、これを実現するためには、加速空洞に入る前にある程度バンチ長を短くしておく必要がある。このために、ERL 入射器では、電子銃と超伝導加速空洞の間に、バンチャー空洞を設置して、バンチ長を圧縮している。

### 3.5 ビームの性質を表すパラメタ

ビームは多数の粒子から構成されており、それらの性質は、6次元位相空間での分布によって表現される。しかしながら、粒子数を  $N$  とすると、その分布は  $6N$  個の値を持つことになる。当然のことであるが、これらの位相空間の情報は非常に重要であり、ビームの性質を完全に表現しているが、実際にビーム同士の品質を比較する際には、幾つかのパラメタで表現できたほうが便利である。そこで、多くの場合6次元位相空間での分布から計算される、横方向のビームの rms サイズ、パンチ長、エミッタンス、エネルギー拡がり、ビーム光学関数などを用いる。ここでは、ビームの分布から、これらのパラメタの求め方を簡単に紹介する。

#### 3.5.1 ビームサイズ、パンチ長

ビームの分布に対する物理量の平均を  $\langle \rangle$  で表すとすると、横方向の rms ビームサイズ  $(\sigma_x, \sigma_y)$ 、rms パンチ長  $\sigma_z$  は、

$$\sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \quad (3.15)$$

$$\sigma_y^2 = \langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle \quad (3.16)$$

$$\sigma_z^2 = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle \quad (3.17)$$

と表される。横方向のビームサイズは、現実の加速器では、スクリーンモニターやワイヤースキャナーなどによって測定される。パンチ長は、偏向 RF 空洞を用いて、パンチ長に横方向の速度変調を与え、自由空間を走らせた後に、スクリーンモニターで横方向の位置を測定することにより、測定することができる。このとき、時間方向の分布が RF 電磁場によるキックによって、横方向の分布に変換される。

#### 3.5.2 エミッタンス

ビームの品質を表す重要なパラメタとして、エミッタンスがある。エミッタンスは、位相空間中でのビームの分布が占める面積により定義される。エミッタンスが小さいビームでは、ビームサイズが小さく、またその拡がりも小さいこととなる。ここでは、位相空間での楕円分布の面積からエミッタンスを考え、その後、現実の加速器で実際に測定される投影エミッタンスについて考える。

まずは、位相空間  $(x, x')$  上での分布が

$$ax^2 + 2bx' + cx'^2 = 1 \quad (3.18)$$

で記述される楕円内で一様である場合を考える。ここで、 $a, b, c$  は楕円を記述するパラメタである。このとき、位相空間の面積は、

$$A_x = \frac{\pi}{(ac - b^2)^{1/2}} \quad (3.19)$$

で与えられる。この面積よりエミッタンスは

$$\varepsilon_x = \frac{A_x}{\pi} \quad (3.20)$$

と定義される。

Liouville の定理より、位置座標  $x$  と力学的運動量  $P_x$  とからなる位相空間での面積は、

$$\iint dx dP_x = \text{const.} \quad (3.21)$$

というように不変量となる。このとき、位相空間  $(x, x')$  での面積は、

$$A_x = \frac{1}{P} \iint dx dP_x = \frac{1}{\gamma\beta mc} \iint dx dP_x \quad (3.22)$$

と表さる。Liouville の定理より  $\iint dx dP_x$  は一定であるので、 $A_x$  は  $1/\gamma\beta$  に依存することがわかる。電子貯蔵リングのように、ビームのエネルギーが変化しない場合には ( $\beta\gamma = \text{const.}$ )、 $A_x$  は一定、つまりエミッタンス  $\varepsilon_x$  は一定になる。しかし、ERL 入射器のように加速に伴いエネルギーが変化していく場合には、 $\beta\gamma \neq \text{const.}$  であるので、エミッタンス  $\varepsilon_x$  は不変量とはならない。そこで、ERL 入射器などのエネルギーの変化する加速器では、エネルギーに依存しないエミッタンスを使用するのが便利である。これが、規格化エミッタンスであり、

$$\varepsilon_{nx} = \beta\gamma\varepsilon_x \quad (3.23)$$

と定義される。

位相空間での面積の代わりに、一般によく使用されるエミッタンスの定義に、rms エミッタンスがある。規格化 rms エミッタンスは、 $x, P_x$  の平均二乗偏差と結合項から、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,x} &= \frac{1}{mc} \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle P_x^2 \rangle - \langle x P_x \rangle^2} \\ &= \beta\gamma \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle x x' \rangle} = \beta\gamma\varepsilon_x \end{aligned} \quad (3.24)$$

と定義される。ここで、エミッタンスの式の中の  $\langle x^2 \rangle$  は平均二乗偏差を表しており、厳密に書けば、

$\langle(x - \langle x \rangle)^2\rangle$  のことである。ここでは、エミッタンスの定義式内では、記述の簡単化のために上記のように記述するので、実際に計算する際には、適宜厳密な式に読み替えて欲しい。

Hamiltonian によって記述される系では、Liouville の定理が成り立ち、位相空間での粒子集団が占める面積は保存する。しかし、位相空間での面積が保存する場合でも、rms エミッタンスは保存しない場合があるので注意が必要である。Hamiltonian に非線形成分が含まれる場合には、位相空間での分布が壊れたりする。このとき面積は保存されるが、rms エミッタンスは増大する。rms エミッタンスが保存するのは、外力が線形でかつ他の方向との運動の結合がない場合である。

多くの場合、エミッタンスの定義として rms エミッタンスが用いられているが、実際に rms エミッタンスが放射光の品質へ与える影響がどうなるかを考える。電子ビームから放射光を発生させる場合、エミッタンスが小さい方が放射光の輝度が上昇することが知られている。これは、ビーム内の各々の電子が放射する放射光が小さくまとまっているほどよく干渉し、放射パワーが増大するということによる。仮に位相空間の面積が同じでも、分布が非線形効果などによって歪み、rms サイズ  $(\sigma_x, \sigma_{x'})$  が増大している場合には、各電子からの放射光も広がってしまい、放射パワーの減少を引き起こす。すなわち、位相空間での分布が歪んでいる場合、位相空間での面積が大きい場合と同様に放射光の質の低下を招く。このように、放射光源の輝度は rms エミッタンスで決まり、rms エミッタンスが小さいほど輝度が高くなる。このため、ビームの品質を表す尺度として、位相空間での面積で定義されたエミッタンスを用いるより、rms エミッタンスを用いた方が良い。

ここまでは、ビームは進行方向に対して一様であると考えてきた。ERL 入射器では電子ビームはバンチ化されているため、次にバンチ化されたビームのエミッタンスについて考える。バンチ化されたビームの場合、バンチを進行方向にスライスして、そのスライス毎の位相空間を考えることができる。すなわち、スライス毎にエミッタンスを定義することができる。これをスライスエミッタンスと呼ぶ。また、バンチ全体を進行方向に垂直な面に対して投影した位相空間も考えることができる。この位相空間から求められるエミッタンスを投影エミッタンスという。投影エミッタンスは、各スライスエミッタンスの重

ね合わせになる。この投影エミッタンスが重要となるのは、RF 電磁場を通過した場合や、空間電荷効果の影響がある場合である。RF 電磁場を有限のバンチ長を持つビームが通過する場合、RF 電磁場が時間に依存するため、バンチスライスの位置によって受ける力が異なってくる。また、空間電荷効果がある場合には、バンチ中央と端の部分では電荷密度の違いにより、空間電荷効果による力が異なってくる。このような場合、バンチスライスの位置によって、位相空間での分布が変化する。すなわち、スライスによってエミッタンスが異なることになる。このとき、投影された位相空間では、各スライスの位相空間分布が一致しないため面積が増大する。つまり、投影エミッタンスの増大が生じる。図 13 にバンチ化されたビームについてのスライスエミッタンスと投影エミッタンスの関係を示す。スライスエミッタンスは、原理的に減少させることはできないが、投影エミッタンスは各スライスの位相空間分布を一致させることにより、減少させることが可能である。これが投影エミッタンスの補償である。空間電荷効果により増大した投影エミッタンスの補償方法については、セクション 6.2 でより詳細に検討する。

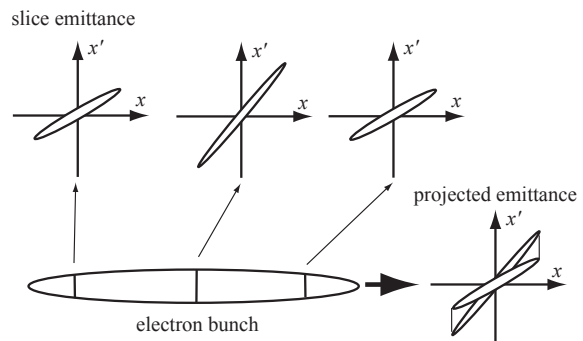


図 13: バンチ化されたビームでの投影エミッタンス。空間電荷効果や RF 電磁場などにより、スライスエミッタンスに不一致が生じているとき、投影エミッタンスは増大する。

### 3.5.3 エネルギー拡がり

ビーム内の粒子は、ほぼ同一のエネルギーを持っているが、全ての粒子が完全に同じエネルギーを持っているわけではない。すなわち、現実のビームはある有限のエネルギー拡がりを持つ。ビーム内の粒子でエネルギー差がある場合には、磁場中で異な

る軌道を描くことになり、これがさまざまな影響を引き起こす。例えば、ビーム内の粒子が有限のエネルギー差を持つ場合、偏向電磁石を通過すると軌道差が生じ、横方向の位置の差が生じる。このようなエネルギー差によって生じる横方向のずれの大きさを表す関数が、分散関数である。分散関数がゼロでない箇所では、分散関数にエネルギー広がりを掛けた分だけ、横方向の分布の広がりが生じる。ERL入射器では、エネルギー広がり、電子ビーム生成時に生じるものの他に、RF空洞での動電磁場によって生じるもの、進行方向の空間電荷効果によって生じるものがある。

エネルギー広がり、ローレンツ因子  $\gamma$  から

$$\delta = \frac{\sigma_E}{E_0} = \frac{\langle (\gamma - \langle \gamma \rangle)^2 \rangle^{1/2}}{\langle \gamma \rangle} \quad (3.25)$$

と計算される。ここで、 $\sigma_E$  は rms エネルギー広がり、 $E_0$  はエネルギーの平均で  $E_0 = mc^2 \langle \gamma \rangle$  である。

### 3.5.4 ビーム光学関数

粒子分布からビーム光学関数 (Courant-Snyder Parameters)  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  は、次のように計算される。粒子の平均位置からのずれ、

$$x_c = x - \langle x \rangle \quad (3.26)$$

$$x'_c = \beta_x - \langle \beta_x \rangle \quad (3.27)$$

を用いるとエミッタンス項は

$$\varepsilon_{xc} = \sqrt{\langle x_c^2 \rangle \langle x_c'^2 \rangle - \langle x_c x_c' \rangle^2} \quad (3.28)$$

と計算される。これを用いるとビーム光学関数は、

$$\hat{\alpha}_x = -\frac{\langle x_c x_c' \rangle}{\varepsilon_{xc}} \quad (3.29)$$

$$\hat{\beta}_x = \frac{\langle \beta_z \rangle \langle x_c^2 \rangle}{\varepsilon_{xc}} \quad (3.30)$$

$$\hat{\gamma}_x = \frac{\langle x_c'^2 \rangle}{\varepsilon_{xc} \langle \beta_z \rangle} \quad (3.31)$$

と表される。 $y$  についても同様に計算することができる。ここで、規格化された粒子速度  $\beta$ 、Lorentz 因子  $\gamma$  と、ビーム光学関数の " $\beta$ "、" $\gamma$ " を区別するために、ビーム光学関数には  $\hat{\cdot}$  をつけた。これらを用いることで、粒子トラッキングコードを用いて ERL 入射器のシミュレーションを行った後に、最後の粒子分布からビーム光学関数を計算することができる。これらを用いて、ERL 周回部でのビーム光学関数計算の初期値とすることができる。

## 4 相対論的なビームの単粒子的取り扱い

ここでは、相対論的なビームに対して、ソレノイドや RF 電磁場によるビームに対する収束作用を示すために、空間電荷効果がない場合の運動方程式を導出する。簡単のために、ビームはパンチ化されておらず、進行方向に対して一様であるとしている。また、ここで求めるビームエンベロープ方程式はセクション 6.1 で紹介する、空間電荷効果による投影エミッタンスの変化を概観するための基礎となる。

### 4.1 運動方程式の導出

ここでは、荷電粒子の集団の運動を論じる前に、ビームを構成する個別の荷電粒子の運動を考える。荷電粒子は、相対論的な速度を持つとして、近軸光線近似を用いて運動方程式を導出する。対象とする系は、 $z$  軸に沿って円筒対称性をもつとする。このとき、粒子の運動は円筒座標系で  $(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}, z, \dot{z})$  によって表すことができる。ここで、 $\dot{\phantom{x}}$  は時間による微分  $d/dt$  を表し、 $'$  は  $z$  による微分  $\partial/\partial z$  を表すものとする。粒子は相対論的な速度をもって、 $z$  軸上を進行するものとする。

運動方程式を求めるにあたって、近軸光線近似を用いることにする。まず、次のような仮定を導入する、

1.  $r$  は外部磁場を作るコイルや鉄心の径に比べて十分小さい
2.  $r'$  も十分に小さい ( $r' \ll 1$ )
3.  $v_\theta$  も十分に小さい ( $r\dot{\theta} \ll \dot{z}$ )

すなわち、荷電粒子は対称軸である  $z$  軸の近くを変動すると仮定する。この仮定の下では、外部電磁場の高次の項を無視することが可能となる。

$z$  軸近傍で、外部電場による静電ポテンシャルは次のように展開できる。

$$\phi(r, z) = V - \frac{1}{4}V''r^2 + \frac{1}{64}V^{(4)}r^4 - \dots \quad (4.1)$$

ここで、 $V(z)$  は  $z$  軸上のポテンシャルで

$$V(z) = \phi(0, z) \quad (4.2)$$

で表される。このとき、進行方向および半径方向の電場は、

$$E_z(r, z) = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z} = -V' \quad (4.3)$$

$$E_r(r, z) = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{2}V''r = -\frac{r}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (4.4)$$

となる。同様にして、磁場のポテンシャル  $\phi_m(r, z)$  が

$$\begin{aligned} \phi_m(r, z) &= \phi_m(0, z) - \frac{1}{4}\phi_m''(0, z)r^2 \\ &\quad + \frac{1}{64}\phi_m^{(4)}(0, z)r^4 - \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

と展開されるとすると、1 次の項を残し、 $\phi_m' = -B$  とすると、磁場は次のようになる。

$$B_z(r, z) = -\frac{\partial\phi_m}{\partial z} = B, \quad (4.6)$$

$$B_r(r, z) = -\frac{\partial\phi_m}{\partial r} = -\frac{1}{2}B'r. \quad (4.7)$$

円周方向の電場、磁場は、円筒対称性の仮定より、 $E_\theta = 0$ 、 $B_\theta = 0$  である。

次に電磁場中での荷電粒子の運動を考える。運動方程式は、式 (3.8) から、

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.8)$$

で与えられる。この運動方程式は、円筒座標系  $(r, \theta, z)$  の場合には、

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{r}) - \gamma m r \dot{\theta}^2 = q(E_r + r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta) \quad (4.9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(\gamma m r^2 \dot{\theta}) = q(E_\theta + \dot{z}B_r - \dot{r}B_z) \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{z}) = q(E_z + \dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r) \quad (4.11)$$

となる。これに円筒対称性がある場合の  $E$  と  $B$  を代入すると、

$$m \frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) - m \gamma r \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}qV''r + q r \dot{\theta} B \quad (4.12)$$

$$m \frac{d}{dt}(\gamma r^2 \dot{\theta}) = -\frac{1}{2}q \dot{z} B' r^2 - r \dot{r} B \quad (4.13)$$

$$m \frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) = -qV' + \frac{q}{2}r^2 \dot{\theta} B' \quad (4.14)$$

となる。式 (4.12) の中の  $\dot{\theta}$  は、式 (4.13) から決まるが、ここでは式 (4.13) の代わりに、系に円筒対称性があると仮定して、正準運動量の保存則から求めることにする。電磁場中での荷電粒子の Hamiltonian は、

$$H = c\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2} + q\phi - mc^2 \quad (4.15)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{A}$  はベクトルポテンシャル、 $\mathbf{P}$  は力学的運動量、 $\mathbf{p}$  は正準運動量で、 $\mathbf{p} = \mathbf{P} + q\mathbf{A}$  である。 $\phi$  と  $\mathbf{A}$  が円筒対称性を持つ場合、Hamiltonian も同様の対称性を持つ。従って、Hamiltonian 方程式より

$$\frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad (4.16)$$

となり、 $p_\theta$  は保存量となる。

$$p_\theta = \gamma m r^2 \dot{\theta} + q r A_\theta = \text{const.} \quad (4.17)$$

磁束  $\Psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  を用いると、

$$\Psi = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r A_\theta \quad (4.18)$$

より、この  $\Psi$  を用いると、 $A_\theta = \Psi/(2\pi r)$  となる。また、 $z$  軸の近傍で  $B_z(r, z) \simeq B_z(0, z) = B$  とすると、 $z$  軸近傍の半径  $r$  の円筒断面を貫く磁束は、

$$\Psi = \pi r^2 B \quad (4.19)$$

と書ける。 $A_\theta$  の代わりに  $B$  を用いると、保存則は

$$p_\theta = \gamma m r^2 \dot{\theta} + \frac{q}{2} B r^2 = \text{const.} \quad (4.20)$$

となる。このとき、 $\dot{\theta}$  は

$$\dot{\theta} = -\frac{qB}{2\gamma m} + \frac{p_\theta}{\gamma m r^2} \quad (4.21)$$

あるいは、 $\dot{z} = dz/dt \simeq \beta c$  として、

$$\theta' = \frac{d\theta}{dz} = \dot{\theta} \frac{dt}{dz} \simeq -\frac{qB}{2\gamma m \beta c} + \frac{p_\theta}{m c \beta \gamma r^2} \quad (4.22)$$

となる。ここで考えている系に円筒対称性がある場合、円周方向の正準運動量は保存量となり、その値は式 (4.20) より、粒子位置  $r$ 、 $\dot{\theta}$ 、 $\gamma$  そして  $B$  の初期値によって決まる。粒子が自由空間 ( $B = 0$ ) から出発する場合には、 $p_\theta = \gamma m r^2 \dot{\theta}$  となる。さらに、円周方向の初期速度がゼロ ( $\dot{\theta} = 0$ ) の場合には、 $p_\theta = 0$  となる。

次に、 $z$  方向の運動方程式 (4.14) から  $\gamma$  とポテンシャル  $V$  の関係を導く。 $\dot{z} \simeq v = \beta c$  ( $v_\theta = r\dot{\theta} \ll v$ ) とすると、式 (4.14) の右辺第 2 項を無視することができ、

$$m \frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) = -qV' \quad (4.23)$$

となる。つぎに左辺を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) &= \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz}(\gamma \dot{z}) \\ &= v(\gamma' v + \gamma v') \\ &= c^2(\gamma' \beta^2 + \gamma \beta' \beta) \end{aligned} \quad (4.24)$$

となる。ここで、 $\beta' \simeq 0$ 、および  $\beta \simeq 1$  とすると、

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{z}) = c^2 \gamma' \quad (4.25)$$

と求まる。これより、式 (4.23) は、

$$m c^2 \gamma' = -qV' \quad (4.26)$$

あるいは、

$$\frac{d}{dt}(m c^2 \gamma + qV) = 0 \quad (4.27)$$

となる。式 (4.27) を積分すると、

$$m c^2 \gamma + qV = \text{const.} \quad (4.28)$$

となり、積分は定数となる。この定数に  $m c^2$  を付け加えると

$$(\gamma - 1)m c^2 + qV = T + U = \text{const.} \quad (4.29)$$

となり、これはエネルギー保存則を示していることがわかる。ここで、 $T$  は運動エネルギー、 $U$  はポテンシャルエネルギーである。 $T = 0$ 、つまり  $\gamma = 1$  のとき  $V = 0$  とすると、定数はゼロとなり、

$$(\gamma - 1)m c^2 + qV = 0 \quad (4.30)$$

となる。このとき  $\gamma$  は

$$\gamma = 1 - \frac{qV(z)}{m c^2} = 1 + \frac{|qV(z)|}{m c^2} \quad (4.31)$$

と表される。

円周方向の正準運動量の保存から求めた式 (4.21) の  $\dot{\theta}$  を  $r$  方向の運動方程式 (4.12) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) &= \frac{q}{2m} V'' r + \frac{r \dot{\theta}}{m} (m \gamma \dot{\theta} + qB) \\ &= \frac{q}{2m} V'' r - \frac{1}{4\gamma} \left( \frac{qB}{m} \right)^2 + \frac{p_\theta^2}{\gamma m^2 r^3} \end{aligned} \quad (4.32)$$

となる。左辺の微分を計算すると、

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) = \dot{\gamma} \dot{r} + \gamma \ddot{r} \quad (4.33)$$

となる。左辺の  $\gamma$  と  $r$  の微分は、

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{dz}{dt} \frac{d\gamma}{dz} = \gamma' \beta c \\ \dot{r} &= \frac{dz}{dt} \frac{dr}{dz} = r' \beta c \\ \ddot{r} &= \frac{d}{dt}(r' \beta c) = r'' \beta^2 c^2 + r' \frac{\gamma'}{\gamma^3} c^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

となる。ここで、 $\gamma'/\gamma^3 = \beta \beta'$  を用いた。これを用いると、式 (4.33) は、

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) = c^2(\gamma \beta^2 r'' + \gamma' r') \quad (4.35)$$

となる。これより、 $r$  方向の運動方程式 (4.32) は、

$$\begin{aligned} c^2(\gamma \beta^2 r'' + \gamma' r') &= \frac{q}{2m} V'' r - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{qB}{2m} \right)^2 r \\ &\quad + \frac{p_\theta^2}{\gamma m^2} \frac{1}{r^3} \end{aligned} \quad (4.36)$$

となる。この式は  $V''$  の項を含むが、エネルギー保存則から求めた式 (4.31) を用いることより、

$$qV'' = -mc^2\gamma'' \quad (4.37)$$

と、 $\gamma''$  を用いて表すことができる。式 (4.36) にこの  $V''$  を代入して整理したものが、ここで求めたかった相対論的な粒子に対する近軸光線近似のもとでの運動方程式

$$r'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2}r' + \frac{\gamma''}{2\gamma\beta^2}r + \left(\frac{qB}{2mc\beta\gamma}\right)r - \frac{p_\theta^2}{m^2c^2\gamma^2\beta^2} \frac{1}{r^3} = 0 \quad (4.38)$$

である。左辺第 2 項は断熱項、第 3 項は加速電場による収束の項、第 4 項はソレノイドによる収束の項、そして第 5 項は円周方向運動量による項である。

以上のように、ここでは近軸光線近似を用いて、相対論的な速度を持つ 1 粒子の運動方程式を導いた。実際のビームは粒子分布を持つため、その運動を考える際には粒子分布による影響を考慮する必要がある。ビームの集団としての運動を考える場合、個別の粒子の座標を全て記述するのではなく、粒子分布に対する rms ビームサイズの変化を考える方が便利である。横方向のビームの運動は、ビームエンベロープと呼ばれるビームの大きさを記述する包絡関数によって記述することができる。ビームエンベロープの時間発展を記述する方程式をビームエンベロープ方程式と呼ぶ。ビームが半径  $r_m$  の円形断面をもち、電荷密度はビーム内で一様で、ビーム内の各粒子の軌道は交差ししないと仮定すると、ビームサイズの変化  $r_m(z)$  は、式 (4.38) の中の  $r$  を  $r_m$  で置き換えたビームエンベロープ方程式で表される。しかし、この式では、位相空間中での粒子分布による影響が考慮されていない。ビームが有限なエミッタンスを持つ場合、ビームエンベロープ方程式にエミッタンスによる増大を表す項を追加する必要がある。次に、ビーム粒子の分布が位相空間上で楕円形状を持つとして、ビームエンベロープ関数とエミッタンスの関係式を導出する。

## 4.2 エミッタンス項

横方向の位相空間上 ( $r, r' = dr/dz$ ) で粒子分布が楕円形状を持つ場合、その楕円は係数  $a, b, c$  を用いて次のように表すことができる。

$$ar^2 + 2br r' + cr'^2 = 1 \quad (4.39)$$

このとき位相空間の面積は、

$$A = \varepsilon\pi = \frac{\pi}{(ac - b^2)^{1/2}} \quad (4.40)$$

と表される。ここで、 $\varepsilon = 1/(ac - b^2)^{1/2}$  はエミッタンスである。次のような楕円の係数からなる行列

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

を用いると、楕円の式 (4.40) は

$${}^t\mathbf{r}\bar{\sigma}^{-1}\mathbf{r} = 1 \quad (4.42)$$

と表される。ここで、

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} \\ {}^t\mathbf{r} = (r, r')$$

である。行列  $\bar{\sigma}$  は、 $r$  と  $r'$  についての二乗偏差から構成される  $\sigma$  行列と

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & \sigma_{rr'} \\ \sigma_{r'r} & \sigma_{r'^2} \end{pmatrix} = \varepsilon^4 \bar{\sigma} \quad (4.43)$$

という関係がある。規格化された粒子分布密度  $\rho(r, r')$  ( $\int \rho dr dr' = 1$ ) を用いると、

$$\sigma_r^2 = \int \rho(r - \langle r \rangle)^2 dr dr' \quad (4.44)$$

$$\sigma_{r'}^2 = \int \rho(r' - \langle r' \rangle)^2 dr dr' \quad (4.45)$$

$$\sigma_{rr'} = \int \rho(r - \langle r \rangle)\rho(r' - \langle r' \rangle) dr dr' \quad (4.46)$$

である。ここで、

$$\langle r \rangle = \int \rho r dr dr' \quad (4.47)$$

$$\langle r' \rangle = \int \rho r' dr dr' \quad (4.48)$$

とした。

簡単のために、電磁場による収束作用のない自由空間での、エミッタンスによるビームエンベロープの変化を考える。 $(r_1, r'_1)$  を持つ粒子が、長さ  $z$  の自由空間を進んだとき、出口での座標は、自由空間での転送行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

を用いて、

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

と表される。この転送行列を用いて、自由空間を渡ったときの楕円分布のパラメタ  $(a, b, c)$  の変化を求める。転送行列  $M$  に対して、行列  $\bar{\sigma}$  は

$$\bar{\sigma}_2 = M\bar{\sigma}_1^t M \quad (4.51)$$

のように転送される。ここで、 $\bar{\sigma}_1$  は  $M$  の入口での値、 $\bar{\sigma}_2$  は出口での値である。自由空間入口のパラメタ

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} c_1 & -b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

から、自由空間出口のパラメタは、転送行列を用いて

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_2 &= \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} c_2 & -b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & -b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{pmatrix} c_1 - b_1 z + z(a_1 z - b_1) & a_1 z - b_1 \\ a_1 z - b_1 & a_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.53)$$

と表される。これより、長さ  $z$  の自由空間では、楕円分布のパラメタは

$$a_2 = a_1 \quad (4.54)$$

$$b_2 = b_1 - a_1 z \quad (4.55)$$

$$c_2 = a_1 z^2 - 2b_1 z + c_1 \quad (4.56)$$

と転送される。これらのパラメタを用いて、ビームエンベロープの変化を計算する。自由空間出口でのビーム半径の最大値は、

$$R_2 = \sigma_{r,2} = \varepsilon\sqrt{c_2} \quad (4.57)$$

と表される。これを1回微分すると、

$$R_2' = \frac{dR_2}{dz} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{c_2}} c_2' \quad (4.58)$$

となる。式(4.56)を1回微分した  $c_2' = 2(b_1 - a_1 z) - 2b_1$  を用いると、

$$R_2' = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{c_2}} c_2' = -\frac{\varepsilon b_2}{\sqrt{c_2}} \quad (4.59)$$

と求まる。これをさらに微分すると、2回微分は

$$\begin{aligned} R_2'' &= \frac{\varepsilon}{2} \left( -\frac{1}{2} c_2^{-3/2} c_2'^2 + c_2^{1/2} c_2'' \right) \\ &= \frac{\varepsilon^2}{R_2^3} \end{aligned} \quad (4.60)$$

となる。これより、自由空間でのエミッタンスによるエンベロープの変化は、

$$R'' - \frac{\varepsilon^2}{R^3} = 0 \quad (4.61)$$

と表される。これがエミッタンスによる項であり、エミッタンスがゼロでない場合には、ビームエンベロープ方程式(4.38)にこの項を付け加える必要がある。

### 4.3 ソレノイドによる収束作用

ここでは、ソレノイド電磁石による収束作用を考える。 $\gamma$  が一定とし、また初期の円周方向の運動量をゼロとする ( $p_\theta = 0$ )。ソレノイドの磁場を  $B$  とすると、近軸光線近似のもとでの粒子の運動方程式は、式(4.38)より、

$$r'' + k^2(z)r = 0 \quad (4.62)$$

となる。ここで、

$$k^2(z) = \left( \frac{qB(z)}{2mc\beta\gamma} \right)^2 \quad (4.63)$$

とした。この運動方程式をソレノイドの入口 ( $z_1$ ) から出口 ( $z_2$ ) まで積分すると、入口と出口でのビームの傾きの差は、

$$r'(z_2) - r'(z_1) = - \int_{z_1}^{z_2} k^2(z) dz \quad (4.64)$$

と計算される。 $k^2$  は常に正であることから、粒子の軌道がソレノイド内で  $z$  軸を横切らない ( $r \geq 0$ ) とすると、 $r'(z_2) - r'(z_1) < 0$  となる。つまり、 $r'(z_2) < r'(z_1)$  となり、このときソレノイド出口での傾きは、入口での傾きに比べて小さくなり、ソレノイドは収束力を及ぼしているということを示している。式(4.64)が示すように、この積分は  $k^2$  の積分、つまり  $B(z)^2$  についての積分であるため、ソレノイドは磁場の向きに関係なく収束力を及ぼすことになる。

ソレノイドによる収束のもう一つの特徴として、 $xy$  空間での分布を収束とともに回転させるという効果がある。円周方向の時間発展は、式(4.22)により表される。ソレノイドの入口で、 $\theta = 0$ 、 $p_\theta = 0$  として、 $\theta'$  を積分すると、粒子はビームの出口で、

$$\theta_r = - \int_{z_1}^{z_2} \frac{qB(z)}{2mc\beta\gamma} dz = - \int_{z_1}^{z_2} k(z) dz \quad (4.65)$$

だけ回転することになる。この積分は、 $B^2$  ではなく  $B$  についての積分なので、回転方向は  $B$  の符号、つ



まり磁場の向きに依存する。このように、ソレノイドはビームに対して収束作用とともに  $xy$  空間での回転を引き起こす。

ソレノイドによる収束作用の焦点距離  $f$  は、

$$\frac{1}{f} = -\frac{r'}{r} = \left( \frac{q}{2mc\beta\gamma} \right)^2 \int_{z_1}^{z_2} B^2(z) dz \quad (4.66)$$

と定義される。ソレノイドの中心磁場の強さを  $B_0$  とし、有効磁場長

$$L_{sol} = \frac{1}{B_0^2} \int_{z_1}^{z_2} B^2(z) dz \quad (4.67)$$

を用いると、焦点距離は

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{q}{2mc\beta\gamma} \right)^2 L_{sol} B_0^2 \quad (4.68)$$

と表され、 $B^2$  の依存性を持つことがわかる。

#### 4.4 動電磁場による収束発散作用

ERL 入射器での重要な物理として、RF 電磁場を利用した加速、バンチ化がある。これらは、マイクロ波を加速空洞内に導入して共振させ、空洞内に動電磁場を形成し、それらと電子ビームを相互作用させることによって行われる。これらの動電磁場は RF (Radio Frequency) 電磁場と呼ばれる。電子ビームを加速する際には、電子ビームが空洞を通過するときに、電磁場の頂点 (最大値を与えるとき) にタイミングを合わせる必要がある。また、電子ビームをバンチ化させる場合には、セクション 4.5 で説明するように、電磁場のゼロ点と交差するようなタイミングでバンチを通過させ、バンチの前後で速度差を生じさせる。

ここでは、ERL 入射器で重要となる横方向の運動に着目しているため、RF 電磁場による横方向の収束発散作用についてのみ紹介する。進行方向についてのビームダイナミクスについては、線形加速器の教科書や他の参考文献を参照して欲しい。

まず、RF 電磁場による横方向の収束発散作用を調べるために、一つの空洞があると仮定し、その空洞内に円筒対称性を持った定在波 (TM<sub>01</sub> モード) が出来ているとする。その中で電子ビームが通過した際に、横方向にどのような影響が生じるかを考える。具体的には、RF 光電陰極電子銃がそれにあたる。RF 光電陰極電子銃の模式図を図 14 に示す。空洞内での  $z$  軸上の電場の  $z$  成分は、

$$E_z(z, t) = E_0(z) \cos(kz) \cos(\omega t) \quad (4.69)$$

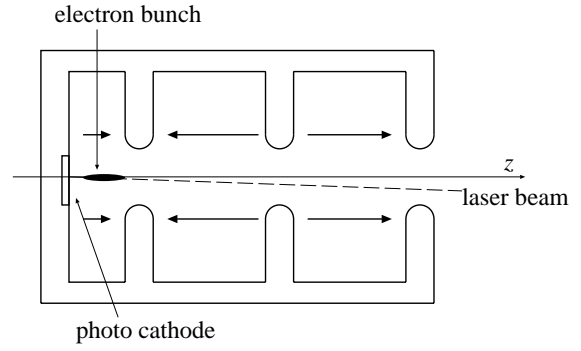


図 14: RF 光電陰極電子銃の模式図。

ここで、 $\omega$  は RF 電磁場の角振動数、 $k$  は波数で  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ 、 $\lambda$  は RF 電磁場の波長である。また、バンチの中心座標を  $z_0$  とすると、位置  $z$  におけるバンチ内の粒子の、バンチ中心からの相対位置は、 $s = z - z_0$  で表される。電場の最大値  $E_0$  は、 $z$  の関数で空洞の入口、出口や口径が狭い部分以外では定数となり、また空洞外ではゼロとなる。ここでは、簡単のために、 $E_0$  は定数であるとする。 $z$  軸近傍では、式 (2.6) および式 (2.7) より、 $E_r(z, t)$  および  $B_\theta(z, t)$  は

$$E_r(z, t) = -\frac{r}{2} \left[ \frac{\partial E_0}{\partial z} \cos(kz) \cos(\omega t) - E_0 \sin(kz) \cos(\omega t) \right], \quad (4.70)$$

$$B_\theta(z, t) = \frac{r\omega}{2c^2} E_0 \cos(ks) \sin(\omega t) \quad (4.71)$$

と計算される。半径方向の運動方程式は、

$$\frac{dP_r}{dt} = q(E_r - vB_\theta) \quad (4.72)$$

であるから、これに上記の  $E_r$  と  $B_\theta$  を代入すると、

$$\frac{dP_r}{dt} = -\frac{qr}{2} \left[ \frac{\partial E_0}{\partial z} \cos(kz) \cos(\omega t) - E_0 \sin(kz) \cos(\omega t) - \frac{\omega}{c} \beta E_0 \cos(ks) \sin(\omega t) \right] \quad (4.73)$$

となる。ビーム粒子の RF 電磁場についての位相

$$\varphi = \omega t - kz \quad (4.74)$$

を導入すると、

$$\frac{dP_r}{dt} = \frac{r}{2} kqE_0 \left[ -\frac{1}{kE_0} \frac{\partial E_0}{\partial z} \cos(ks) \cos(ks + \varphi) + \frac{1}{2}(1 + \beta) \sin(2ks + \varphi) - \frac{1}{2}(1 - \beta) \sin(\varphi) \right] \quad (4.75)$$

となる。これより、半径方向の力は位相  $\varphi$  に依存、すなわち、バンチ内での粒子の相対的な位置に依存して変化する。この式は、RF 電子銃に限らず、一般の RF 加速空洞に適用することができる。この横方向の収束発散の効果は、低エネルギーのイオン線形加速器や、高い加速勾配を持つ電子ビーム用入射器やバンチャー、RF 電子銃などで重要となる。ここで、ビームは電子ビーム ( $q = e$ ) であるとして、電子ビームは速やかに  $\beta \simeq 1$  に加速されると考える。このとき、 $\partial E_0 / \partial z$  の項は、通常それほど重要ではないため、議論を簡単にするために、ここではこの項を省略する。これらの仮定の下では、半径方向の運動方程式を

$$\frac{dP_r}{dt} = \frac{r}{2} k e E_0 \sin \varphi \quad (4.76)$$

と近似することができる。これより、位相が  $-\pi/2 < \varphi < 0$  の場合には、RF 電磁場による半径方向の力は、発散力となる。次に、この方程式を積分して、半径方向の運動量を求める。初期条件として、 $z = 0$  で、 $P_r = 0$  とし、また半径方向の粒子の位置は一定に保たれる ( $r \simeq \text{const.}$ ) とし、RF 空洞の入口から出口まで積分すると、半径方向の運動量  $P_r$  は、

$$P_r = \frac{erE_0}{2c} \cos \varphi_1 \quad (4.77)$$

となる。ここで、 $\varphi_1$  は空洞入口での粒子の位相である。

次に、この位相  $\varphi_1$  を、バンチの中心での位相  $\varphi_{01}$  とその周りでの微小な位相  $\Delta\varphi$  で、

$$\varphi_1 = \varphi_{01} + \Delta\varphi \quad (4.78)$$

と展開できるとする。このとき、微小な位相は  $\Delta\varphi \simeq -k(z - z_0) = -ks$  と表すことができる。これを用いると、バンチ中心の粒子 ( $x, z_0$ ) と、中心から  $s$  だけ離れた粒子 ( $x, z$ ) の運動量の差は、

$$\Delta P_x = P_x(x, z) - P_x(x, z_0) \quad (4.79)$$

となる。ここで、後で定義する横方向の rms エミッタンスを  $x$  方向に対して計算するために、 $r$  を  $x$  で置き換えた。式 (4.77) より、 $0 < \varphi_0 < \pi/2$  のとき運動量の差は

$$\Delta P_x = \frac{eE_0k}{2c} |\sin \varphi_{01}| xs \quad (4.80)$$

と計算される。これより、 $x$  方向の運動量の差は、横方向の位置  $x$  と、バンチ中心からの進行方向の位置  $s$  の積で表されることがわかる。 $s$  に依存するという

ことは、すなわちバンチスライスによって、発散力が異なることを表しており、投影エミッタンスの増大を引き起こすことになる。バンチが位相空間内である分布を持つとし、 $\Delta P_x$  と  $x$ 、そして  $s$  についての二乗平均から RF 電磁場の発散作用によるエミッタンスの増大量を計算することができる。 $\langle \rangle$  を粒子分布に対しての平均とすると、 $x$  方向の規格化エミッタンスの増大量は、

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{nx,rf} &= \frac{[\langle x^2 \rangle \langle \Delta P_x^2 \rangle - \langle x \Delta P_x \rangle^2]^{1/2}}{mc} \\ &= \frac{eE_0k}{2mc^2} \sigma_x^2 \sigma_z |\sin \varphi_{01}| \end{aligned} \quad (4.81)$$

と計算される。ここで、 $\sigma_x = \langle x^2 \rangle^{1/2}$ 、 $\sigma_z = \langle s^2 \rangle^{1/2}$  とした。このように、バンチ中心での位相  $\varphi_{01}$  によって、エミッタンスの増大が生じることが示された。

次に、横方向の運動量のバンチ中心からの距離  $s$  に対する依存性から、上記の場合と同様にエミッタンスの変化を検討する。横方向の運動量  $P_x$  は、

$$\begin{aligned} P_x(x, s) &= P_x(0, 0) + \frac{\partial P_x}{\partial x} x + \frac{\partial P_x}{\partial z} z \\ &\quad + \frac{\partial^2 P_x}{\partial x \partial z} xz + \dots \end{aligned} \quad (4.82)$$

と展開することができる。このとき、右辺第 3 項は RF 電磁場によるキックを表し、第 4 項は収束発散作用を表す。図 15 に、位相空間中での RF 電磁場によるキックと収束発散作用の影響を示す。キックによる影響は、スライスによって位相空間での分布が  $P_x$  方向に平行に移動することであるが、それに対して収束発散作用による影響は、粒子の位置  $x$  にも依存する。キックの影響は、ビームラインの下流側でキャンセル可能であるのに対して、収束発散作用による影響は一般的にはキャンセルできないという大きな違いがある。キックと収束発散作用によるエミッタンスの増大は、

$$\Delta \varepsilon_{kick} = \frac{1}{mc} \left| \frac{\partial P_x}{\partial z} \right| \sigma_x \sigma_z \quad (4.83)$$

$$\Delta \varepsilon_{focus} = \frac{1}{mc} \left| \frac{\partial^2 P_x}{\partial s \partial x} \right| \sigma_x^2 \sigma_z \quad (4.84)$$

と表すことができる。これらより、RF 空洞での規格化エミッタンスの増大は、

$$\varepsilon_{nx}^2 = \varepsilon_0^2 + (\Delta \varepsilon_{kick})^2 + (\Delta \varepsilon_{focus})^2 \quad (4.85)$$

とすることができる。ここで、 $\varepsilon_0$  は RF 空洞入口でのエミッタンスである。

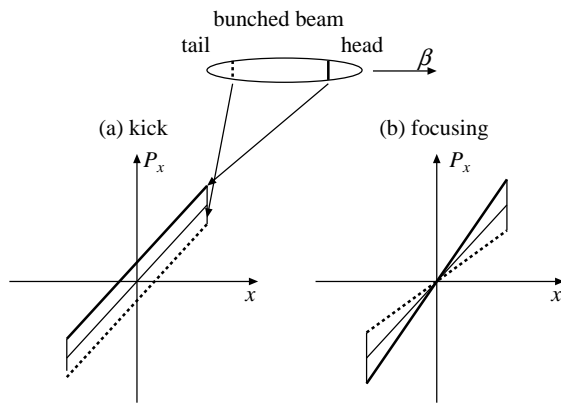


図 15: RF 電磁場によるキックと発散収束作用が位相空間分布に及ぼす影響。(a) キックによるスライスの変化、(b) 発散収束作用によるスライスの変化。

このように、ここでは簡単なモデルを用いて、RF 電磁場によって投影エミッタンスの増大が引き起こされることを見てきた。実際の ERL 入射器では、複数の RF 加速空洞が導入されるため、低いエミッタンスを持つビームを生成するためには、これらの位相や加速勾配を調整する必要がある。さらに、実際の加速電場の分布は一般に加速空洞の形状に依存し、また空間電荷効果の影響も考慮しなければならないため、これらの多数のパラメータを解析的に最適化するのは難しい。このため、通常は粒子トラッキングによるシミュレーションの繰り返しによるパラメータの最適化が行われる。

また、低エミッタンスビームを得る上で、RF 空洞の設置精度も重要である。設置誤差により、RF 電磁場の中心軸に対して、ビーム軌道のオフセットや傾きが生じるが、これらはエミッタンスの増大を引き起こす。実際の ERL 入射器では、これらの設置誤差についても考慮しなければならない。

#### 4.5 バンチャーによるバンチ長の圧縮

ERL 入射器用の光電陰極電子銃からは、パルス状のレーザーを用いて、バンチ化されたビームが取り出される。短いバンチ長を得るためには、レーザーのパルス幅を短くすれば良いが、実際には空間電荷効果があるため、生成直後のバンチ長は保存されない。特に、カソード近傍の電子ビームが生成された直後では、ビームのエネルギーが低いために、空間電荷効果によるバンチ長が引き伸ばされる効果が顕著に現れる。同じ電荷量のバンチを生成する場合、レー

ザーのパルス幅を短くすると、電荷密度が増大することになり、空間電荷効果がより強く現れることになる。このため、レーザーのパルス幅は、要求される電荷量、バンチ長、エミッタンスに合わせて最適な値にしなければならない。

電子銃で生成されたバンチは、空間電荷効果によって急激に増大するため、入射器の出口で短いバンチ長のビームを得るには、電子銃の後ろにバンチャー空洞を設置して、速度変調によってバンチ長を短くする必要がある。このようなバンチングの方法をドリフトバンチング (drift bunching)、あるいは速度バンチングという。また、もう一つのバンチングの方法として、磁場バンチングがある。これは、磁場中で運動量の異なる粒子は異なる軌道を取るという性質を用いている。バンチ内の粒子に適切な運動量の差を生じさせておけば、適切な磁場中の軌道を通してやることにより、ある地点でのバンチ長を短くすることが可能となる。このためには、運動量差を生じさせるための RF 電磁場、そして適切な軌道を形成するための電磁石系が必要となる。

この2つのバンチングの方法では、それぞれ次のような特徴がある。ドリフトバンチングの場合は、バンチ内の速度差が重要であるため、ビームのエネルギーが十分高い場合 ( $\beta \sim c$ ) の場合には、十分な速度差が得られず、うまく機能させることが出来ない。このため、ドリフトバンチングはエネルギーの低い領域で用いられる。また、ドリフトバンチングの場合には、速度変調を与えるバンチャー空洞があればよいので、その装置はコンパクトになる。従って、ビームのエネルギーがまだ低いということ、そして小規模なシステムであるということで、入射器では主にドリフトバンチングが用いられている。磁場バンチングの場合には、運動量の差による磁場中での軌道長の変化を利用するため、ドリフトバンチングに比べると大規模なシステムとなる。しかし、速度変調を利用していないため、高いエネルギーのビームでもこの方法は有効である。ERL 周回部では、バンチ長を圧縮するために磁場バンチングが用いられる。運動量差は、主加速空洞によって与えられ、周回部のビーム光学関数を最適化することにより、挿入光源の位置でバンチ長を短くすることが可能である。

次にドリフトバンチングの概念について、簡単なモデルを用いてを紹介する。ERL 入射器ではあまり使われない磁場バンチングについては、他の文献を参照して欲しい。ドリフトバンチングでは、バンチに速度変調を与えるために、バンチャー空洞を通過

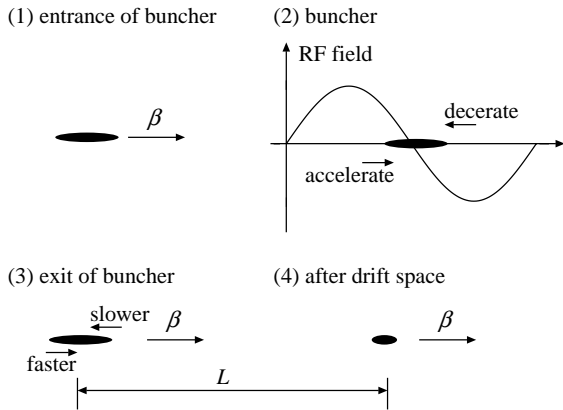


図 16: RF 電磁場によるバンチング。バンチ中心で RF 電磁場がゼロになるようにして、バンチに速度変調を掛ける。バンチ前方は減速され、バンチ後方は加速されるため、ある距離  $L$  だけ自由空間を進行した後、バンチ長は最小になる。

させる。バンチャー内での RF 電磁場を

$$E_z = E_0 \sin(\omega t) \quad (4.86)$$

とすると、図 16 に示すように、 $\omega t = 0$  ときにバンチの中心が通過するようにする。このとき、バンチ中心より前にいる粒子は減速され、後ろにいる粒子は加速される。位相  $\omega t$  がゼロ近傍にあるとすると、 $E_z$  は次のように

$$E_z \sim E_0 \omega t \quad (4.87)$$

と、 $\omega t$  の 1 次の関数として展開することができる。バンチャー空洞通過後は、図 17 に示すように、 $(z, P_z)$  位相空間中で、分布が傾くことになる。自由空間を通過するときは、 $P_z$  は変化せず、 $z$  のみが  $P_z$  に依存して変化する。適当な距離進行すると、図 17 に示すように、分布の空間的拡がり、つまりバンチ長は最小となる。このように、ドリフトバンチングにより、バンチ長を圧縮することが可能である。

以上のモデルでは、空洞内での電場が  $E_0$  で一様であるとして簡単化したが、現実には、RF 電磁場の非線形性や、相対論的な効果により、速度変調は非線形となる。このため、自由空間を最適な距離進んだ後でも、バンチ長は有限に留まり、ゼロとはならない。また、上で説明したように、空間電荷効果によるバンチ長を引き伸ばす効果があるため、現実の入射器でのバンチ長の圧縮は複雑になり、解析的にバンチ長の最小値を予測するのは難しい。このため、入射器の設計では、空間電荷効果を含んだ数値計算

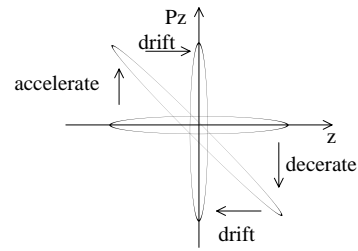


図 17: 進行方向の位相空間  $(z, P_z)$  での RF 電磁場によるバンチング。バンチ入口で速度差のなかったビームが、バンチャーで速度変調を受け、その分布は傾く。自由空間では  $P_z$  は変化しないが、 $z$  はビームが進行するに従い変化する。自由空間をある距離進むと位相空間中での  $z$  の分布は最小になる。

コードを用いて、加速電場の強さや位相、加速空洞間の距離などの多数のパラメタを最適化する必要がある。

## 5 空間電荷効果

ここでは、空間電荷効果の影響について紹介する。まずは、対象とするビームが空間電荷効果が重要な領域にあるか、あるいはエミッタンスによる効果が重要な領域あるかを判定するためのパラメタとして、Debye 長を導入する。その後、空間電荷効果による力が空間的に滑らかな場合について、セクション 4.1 で求めたビームエンベロープ方程式を拡張する。

### 5.1 空間電荷効果の分類

ビームは荷電粒子が集団でほぼ同じ速度で運動する状態である。荷電粒子間には当然ながら Coulomb 相互作用が働き、同じ電荷符号の粒子間では斥力が働き、違う電荷符号の粒子間では引力が働く。ビームのように非常に多くの荷電粒子を含む場合には、離れた距離にある粒子集団からの相互作用の全体は空間的に滑らかな力として考えることができるが、この他に、近接粒子した粒子がいる場合には衝突的な力も考える必要がある。この状況をもう少し詳しく説明する。まず、ビームの静止系でビーム内の粒子の速度差が非相対論的であるとする。また、ビームは  $N$  個の粒子からなり、各粒子は電荷  $q$  を持つとする。このとき、粒子  $j$  と粒子  $i$  の距離を  $r_{ij} = r_i - r_j$  とすると、粒子  $j$  が粒子  $i$  に及ぼす Coulomb 力は、

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (5.1)$$

となり、粒子  $i$  に対する全 Coulomb 力は、

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i}^N \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (5.2)$$

と表される。Coulomb 力の性質として、ある程度粒子  $i$  から距離が離れた粒子からの力も、 $\mathbf{F}_i$  に寄与する。これら粒子からの多数の小さい力が集まることで、空間的に滑らかなポテンシャル  $\phi_s(\mathbf{r}, t)$  が形成されるとみなすことができる。ただし、粒子  $i$  に極めて近い距離にも幾つか粒子があることが考えられ、これらの力は粒子  $i$  との位置関係に強く依存した衝突的な力となる。ここで、形式的に全 Coulomb 力を空間的に滑らかな項と衝突的な項に分けると、

$$\mathbf{F}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \phi_s(\mathbf{r}, t) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (5.3)$$

と表すことができる。ここで、右辺第 2 項は粒子  $i$  に極めて近い位置にある粒子の和とする。どの程度の

範囲までこの領域に入るとするかについては、後で導入する Debye 長がその指針となる。空間的に滑らかなポテンシャルは、電荷密度分布  $\rho(\mathbf{r}, t)$  から、

$$\phi_s(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (5.4)$$

と計算することができる。

多くの空間電荷計算コードでは、空間的に滑らかな力のみを取り入れて空間電荷効果を計算しているが、場合によってはこの仮定が成り立たず、衝突力による効果が支配的になる場合も在り得る。正しく空間電荷計算コードを使用するためには、対象とするビームにおいて、どちらの力が支配的なのかを知る必要がある。

ここでは、プラズマ物理での基本パラメタである Debye 長の概念を電子ビームに適用し、空間電荷効果が滑らかな力として取り扱えるか、あるいは衝突的な力も考慮する必要があるかを分類する。また、空間電荷効果を含んだビームのシミュレーションでは、多くの場合マクロ粒子を使った粒子トラッキング計算が行われるが、マクロ粒子の数がどの程度必要かを把握するためにも、Debye 長の考えは有効である。ここでは、まず中性プラズマ中での Debye 遮蔽の効果を見た後に、相対論的ビームでの Debye 長、プラズマ振動数を導入する。最後に、Debye 長を利用して、電子ビームの空間電荷効果を分類する。

まず、中性なプラズマに対しての Debye 長を導入し、その効果を紹介する。一価の正のイオンと電子からなる中性なプラズマを考える。プラズマは温度  $T$  で平衡状態にあるとする。簡単のために、球座標で考え、プラズマの中心 ( $r = 0$ ) にテスト電荷  $q$  が置かれたとする。このとき、電荷分布は中性から外れ、ポテンシャル  $\phi(r)$  が生じる。イオンと電子の分布は、熱平衡状態と仮定したので、Maxwell 分布で表され、

$$n(r) = n_0 \exp \left[ -\frac{q\phi(r)}{k_B T} \right] \quad (5.5)$$

となる。ここで、 $n_0 = n(0)$  である。このポテンシャルは、イオンと電子から作られる電荷分布のずれによって生じ、Poisson 方程式

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(r) &= -\frac{q}{\epsilon_0} n_i(r) - n_e(r) \\ &= -\frac{q}{\epsilon_0} n_0 \left[ \exp \left( -\frac{q\phi(r)}{k_B T} \right) \right. \\ &\quad \left. - \exp \left( \frac{q\phi(r)}{k_B T} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

によって計算される。ここで、右辺第1項はイオンによる項、第2項は電子による項である。 $q\phi(r) \ll k_B T$ として、指数関数を展開し、1次の項のみを残すと、

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \left[ \frac{2q\phi(r)}{k_B T} \right] = 2 \frac{\phi(r)}{\lambda_D^2} \quad (5.7)$$

となる。ここで、 $\lambda_D$  は非相対論的な場合の Debye 長であり、

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 k_B T}{q^2 n_0} \right)^{1/2} \quad (5.8)$$

と定義される。また、熱平衡状態での rms 速度  $\bar{v}_x = (k_B T/m)^{1/2}$  と、プラズマ周波数  $\omega_p = (q^2 n_0 / \epsilon_0 m)^{1/2}$  を用いて、

$$\lambda_D = \frac{\bar{v}_x}{\omega_p} \quad (5.9)$$

と定義することもできる。式 (5.7) の解は、

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}r}{\lambda_D}\right) \quad (5.10)$$

となる。 $r \ll \lambda_D$  の領域では、指数関数はほぼ 1 となり、ポテンシャルは

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.11)$$

となり、真空中での電荷  $q$  が作るポテンシャルと等しくなる。このことは、Debye 長より粒子間の距離が短い場合 ( $r \ll \lambda$ ) には電荷  $q$  が作るポテンシャルに等しくなるが、Debye 長より粒子間の距離が長い場合 ( $r \gg \lambda_D$ ) にはポテンシャルは指数関数的に減少するということを示している。図 18 に示すように、Debye 長より外側では、裸の電荷のときと比べて電場が遮蔽されている。これがプラズマ中での Debye 遮蔽である。

電子ビームは非中性プラズマと考えることができ、これらの議論から Debye 長による粒子間相互作用の分類を類推することができる。電子ビームの場合には、異種電荷による遮蔽の効果はないが、粒子間の相互作用が空間的に滑らかであるか、あるいは衝突的であるかを示すのに Debye 長を使うことができる。

次に相対論的な速度を持つ電子ビームに対してのプラズマ周波数と Debye 長を定義する。セクション 3.2 で示したように、相対論的な速度を持つ電子ビームの横方向の運動方程式は、 $\ddot{x} = \omega_p^2/2 = F_s/\gamma m$  と書ける。ここで、ビームは円筒断面を持つ連続ビームとすると、空間電荷効果による力は式 (3.12) より、 $F_s = q^2 n r / (2\epsilon_0 \gamma^2)$  と表される。これより相対論的な場合のプラズマ周波数を

$$\omega_p = \left( \frac{q^2 n}{\epsilon_0 \gamma^3 m} \right)^{1/2} \quad (5.12)$$

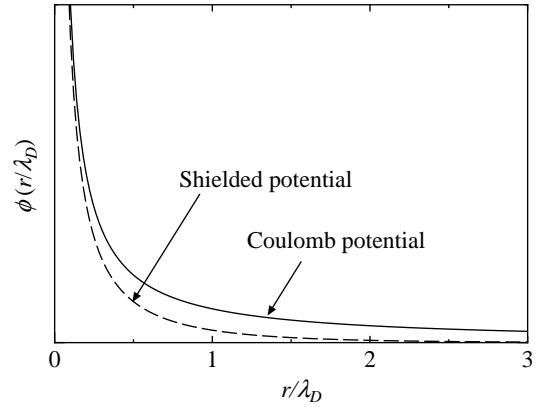


図 18: プラズマ中での Debye 遮蔽の効果。Debye 長より外側では、ポテンシャルが裸の電荷のときに比べて小さくなる。

と定義することができる。ここで定義したプラズマ周波数を用いて、相対論的な場合の Debye 長を

$$\lambda_D = \frac{\bar{v}_x}{\omega_p} = \left( \frac{\epsilon_0 m \gamma^3 \bar{v}_x^2}{q^2 n} \right)^{1/2} \quad (5.13)$$

と定義する。平均速度  $\bar{v}_x$  は、ビームが実験室系の温度で熱平衡状態にあるとすると、 $\gamma m \bar{v}_x^2 = k_B T$  の関係から、 $\bar{v}_x = (k_B T / \gamma m)^{1/2}$  と求めることができる。これを上の式に代入すると、相対論的な場合の Debye 長は、

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 \gamma^2 k_B T}{q^2 n} \right)^{1/2} \quad (5.14)$$

となる。

最後に、ここで定義した相対論的なビームに対する Debye 長を用いて、ビーム内での空間電荷効果の影響を分類する。まずは、ビーム内の粒子間平均距離を  $l_p$  として、 $\lambda_D \gg l_p$  の場合を考える。この場合、Debye 長の内側には十分に多くの粒子が含まれることになり、電荷分布あるいはそれが作る電磁場は十分に空間的に滑らかであると考えられる。ビームの半径を  $a$  とすると、Debye 長に対する大きさの比から、次のような 3 つの領域が考えられる。

1.  $\lambda_D \gg a$ : 衝突的な力が強い、エミッタンスが支配的な領域
2.  $\lambda_D \ll a$ : 集団的な効果による空間的に滑らかな力が支配的な領域
3.  $\lambda_D \sim a$ : 衝突的な力、空間的に滑らかな力の両方が重要

1. の  $\lambda_D \gg a$  の場合は、ビームエネルギーが高い、あるいはビームの温度が十分高い場合に起きる。ビーム内の粒子は Debye 長以内に収まるため、ビームの集団的な効果による空間的に滑らかな力よりも、数多くの粒子から受ける衝突的な力が支配的となる。また、衝突的な力によりビーム内の粒子間でエネルギーのやり取りが十分に行われるため、ビームは熱平衡状態に達し、その分布は Maxwell-Boltzmann 分布で表される。このような状況では、統計力学からの類推により、個別の粒子間の相互作用は無視することができ、ビームを 6 次元の位相空間  $(r, P)$  を持つ単粒子の集団として扱うことができる。この場合には、ビームの持つエミッタンスが重要な役割を果たす。

次に、2. の  $\lambda_D \ll a$  の場合は、ビームを構成する粒子の多くは Debye 長の外にあるため、空間的に滑らかな力が支配的となる。この場合には、個別の粒子間での相互作用より、ビームの集団的な効果による力が重要となる。空間電荷効果による力は空間的に滑らかであるとみなすことができ、外から加えた力と同様に扱うことができる。このため、粒子の運動は、外場中での単粒子の Hamiltonian によって記述されることが可能であり、また、その 6 次元位相空間  $(r, P)$  中での Liouville の定理も成り立つと考えることができる。セクション 5.3 で考える、ビーム内で軌道が交差しないビーム (laminar beam) の場合には、空間電荷効果は位置の線形な関数とすることができる。このような場合には、rms エミッタンスも保存する。

3. の場合は、空間的に滑らかな力だけでなく、衝突的な力も考慮する必要があり、取り扱いが複雑になる。衝突的な力は粒子分布を変化させるため、空間電荷による力も非線形となる。しかし、上記の 2 つの場合と同様に、6 次元位相空間  $(r, P)$  での粒子分布として、その運動を表現することができる。

最後に、 $\lambda_D \sim l_p$  の場合を考える。この場合、Debye 長以内に入る粒子の数は限られてくる。このような状況は、ビームの温度が極端に低い場合か、粒子密度が高い場合に生じる。ある粒子を考えると、その周りにいる少数の非常に近接した粒子からの力は、他の離れた多数の粒子からの力に比べて、強いことになる。すなわち、近接した少数の粒子との瞬間的な相互作用 (衝突) が重要となる。このような状況を図 19 に示した。よく使用される空間電荷計算コードでは、衝突的な相互作用は考慮されていないため、ビームがこの領域にある場合には、注意が必要である。

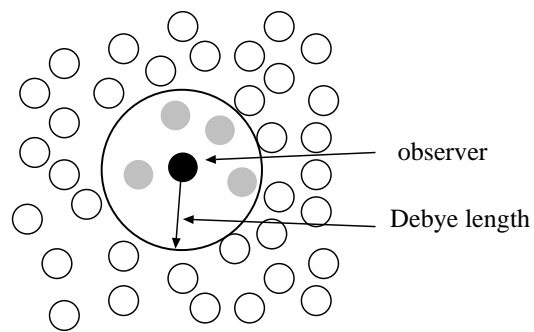


図 19:  $\lambda_D \sim l_p$  の場合の相互作用。着目する粒子の極近傍にいる少数の粒子からの力が支配的となる。

## 5.2 空間電荷効果の影響

横方向では、セクション 3.3 で見たように、電子ビームのサイズを広げる方向に、つまり斥力として空間電荷効果が作用する。また、進行方向でも同様の斥力効果を与えるが、もう一つ重要な効果として、ビームにエネルギー拡がりを与えるということがある。ビームのエネルギー拡がりが増加する場合、偏向電磁石から構成される合流部などの分散関数ある部分ではビームサイズの増大を引き起こす。また、パンチ化されたビームでは、パンチスライス位置に依存したエネルギー拡がりが生じるため、投影エミッタンスの増大を引き起こす。この影響については、セクション 6.2 で紹介する。

## 5.3 空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式

空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式を求めるために、ここでは連続ビームを考え、次のような仮定を導入する。

1. ビームは半径  $a$  の円形断面を持ち、半径  $b$  の同心円ドリフト管の中を進行する。
2. ビーム軸上とドリフト管の壁面の間でのポテンシャルの差は、運動エネルギーに比べて十分小さい。
3. 同心円ドリフト管壁面での鏡像電荷がビームに及ぼす効果は無視する。
4. ビームの粒子密度は、ビーム内では一様、ビーム外ではゼロとする。2. よりビーム内の粒子の進行方向の速度は全て同じとすることができ、

このときビーム内の電流密度は一様であることができる。

5. 全てのビーム粒子は軌道上に沿って運動し、その軌道は交差しない。
6. ビームは安定状態にあるとする ( $\partial/\partial t = 0$ )。ビーム進行方向に沿ったあらゆる位置で、ビーム断面は時間に依存して変化しない。
7. 粒子の軌道は、近軸光線近似に従う ( $r'$  は小さい)

ビームの電荷密度  $\rho$  と電流密度  $J$  は、その点でのビームの速度を  $v$  とすると、連続の式より、

$$J = \rho v \quad (5.15)$$

と関係付けられる。また、電荷の線密度を  $\rho_L$  とすると、電流は、

$$I = \rho_L v \quad (5.16)$$

と記述される。ここで、 $v_z \simeq v$  と仮定している。空間電荷により、ビーム軸上 ( $r = 0$ ) とビームの端 ( $r = a$ )、真空チェンバーの壁面上 ( $r = b$ ) 上ではポテンシャルの差が生じる。ビームの運動エネルギーが一定であると仮定すると、軸上の粒子の運動エネルギーは、ビームの端にいる粒子よりも小さくなる。従って、粒子の速度は  $r$  の関数  $v(r)$  となる。一般に、 $\rho$ 、 $v$ 、 $J$  のうち一つが与えられれば、他のパラメータは Maxwell 方程式と運動方程式によりセルフコンシステントに決定されるが、ここでのモデルでは議論を簡単にするために、ビーム断面上では  $\rho$ 、 $v$ 、 $J$  は全て一様であり、 $r$  に依存しないとする。近軸光線近似の下では、 $v_r \ll v$ 、 $v_\theta \ll v$ 、 $v_z \simeq v$  であるので、 $r$  方向のポテンシャルの変化は粒子の運動エネルギーに比べて小さいと考えることができるので、それほど大きな差を与えない。従って、ここでの議論でこの近似を用いることはそれほど悪くない。この仮定のもとでは、ビーム電流から電流密度は  $\rho_0 = I/(a^2\pi v)$  と表される。このとき電流密度、電荷密度は、 $0 \leq r \leq a$  の場合、

$$J_z = J = \frac{I}{\pi a^2}, \quad (5.17)$$

$$\rho = \rho_0 = \frac{I}{\pi a^2 v}, \quad (5.18)$$

$r > a$  の場合は、 $J = 0$ 、 $\rho = 0$  となる。円筒形ビームで電荷密度が一定の場合、Gauss の法則より電場は半径方向成分だけになり、

$$E_r(r) = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} = \frac{I r}{2\pi\epsilon_0 a^2 v}, \quad (r \leq a), \quad (5.19)$$

$$E_r(r) = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 v r}, \quad (r > a), \quad (5.20)$$

と計算される。次に、磁場は、Ampere の法則より円周方向成分だけになり、

$$B_\theta(r) = \mu_0 \frac{I r}{2\pi a^2}, \quad (r \leq a), \quad (5.21)$$

$$B_\theta(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}, \quad (r > a) \quad (5.22)$$

と計算される。

式 (5.19)、(5.20) を積分することにより、電場が作るポテンシャルを計算する。真空チェンバー壁面上 ( $r = b$ ) でポテンシャルがゼロ ( $\phi = 0$ ) とすると、

$$\phi(r) = V_s \left( 1 + 2 \log \frac{b}{a} - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (0 \leq r \leq a), \quad (5.23)$$

$$\phi(r) = 2V_s \log \frac{b}{r} \quad (a \leq r) \quad (5.24)$$

となる。ここで、

$$V_s = \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 \beta c} \quad (5.25)$$

である。

次に、ビームが作る電磁場中での運動方程式を考える。 $r$  方向の運動方程式は、式 (4.9) の中で、外部電磁場による加減速がなく ( $\gamma = \text{const.}$ )、また、円周方向の速度  $r\dot{\theta}$  が十分小さいとして、 $qr\dot{\theta}B_z$  の項を無視すると、

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{r}) = m\gamma \ddot{r} = qE_r - q\dot{z}B_\theta \quad (5.26)$$

となる。これに、ビームが作る電磁場、式 (5.19) の  $E_r$  と式 (5.21) の  $B_\theta$  を代入すると、

$$m\gamma \ddot{r} = \frac{qIr}{2\pi\epsilon_0 a^2 \beta c} (1 - \beta^2) \quad (5.27)$$

となる。ここで、 $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$  と  $\dot{z} = v = \beta c$  を使用した。左辺の時間による微分を  $z$  による微分で表現すると、

$$\ddot{r} = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} \left( \frac{dz}{dt} \frac{dr}{dz} \right) = \beta^2 c^2 r'' \quad (5.28)$$

となる。これより、空間電荷効果を含んだ運動方程式は、

$$r'' = \frac{qIr}{2\pi\epsilon_0 m c^3 \beta^3 \gamma^3 a^2} \quad (5.29)$$

となる。これが、空間電荷効果によるビームの発散を表現する。ここで、空間電荷効果の影響を表現するための幾つかのパラメータを導入する。Lasown に



より導入された無次元パラメタである一般化されたパービアンズ (generalized perveance) は、

$$K = \frac{I}{I_0} \frac{2}{\beta^3 \gamma^3} = \frac{2\nu_B}{\beta^2 \gamma^3} = \frac{\omega_p^2 a^2}{2\beta^2 c^2} \quad (5.30)$$

のように定義される。ここで、 $I_0$  は空間電荷の特徴電流 (characteristic current)、

$$I_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 mc^3}{q}, \quad (5.31)$$

$\nu_B$  は Budker パラメター、

$$\nu_B = \frac{I}{I_0 \beta}, \quad (5.32)$$

$\omega_p$  はプラズマ周波数、

$$\omega_p^2 = \frac{qI}{\pi\epsilon_0 mc\beta\gamma^3 a^2} \quad (5.33)$$

である。一般化されたパービアンズを用いると、空間電荷効果を含んだ  $r$  方向の運動方程式は、

$$r'' = \frac{K}{a^2} r \quad (5.34)$$

と表される。

ここまでは、空間電荷効果のある場合のビーム内の荷電粒子の運動方程式を求めてきたが、これをビームエンベロープを記述する方程式に拡張する。式 (5.34) は、ビーム半径  $a$  が  $z$  の関数として与えられれば、ビーム内 ( $r \leq a$ ) の粒子に対して解くことができる。ビームを構成する荷電粒子の軌道が、互いに交差しない (laminar flow) と仮定すると、式 (5.34) より、全ての粒子の軌道は、 $r/a$  でスケールされる同じ形の軌道を持つ。このことより、ビームの端にある  $r = a$  をもつ粒子は、時間発展後もずっとビームの端にいることになる。すなわち、式 (5.34) で  $r = a = r_m$  としたものが、自由空間でのビームサイズ  $r_m$  の時間発展を記述する、ビームエンベロープ方程式

$$r_m'' = K \frac{1}{r_m} \quad (5.35)$$

となる。また、実際のビームを扱う場合には、ビームの半径  $a$  の代わりに rms ビームサイズ  $\sigma_x$  あるいは  $\sigma_y$  を使う方が便利である。ここでは、円形断面をもつビームを考え、その中で粒子密度は一定としているので、面密度  $\rho_{S0}$  が一定であるとする、rms ビームサイズは、

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{\rho_{S0}} r d\theta \int_0^{2\pi} dx^2 \rho_{S0} \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^a r^3 dr \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

と計算される。ここで、 $x = r \cos \theta$  を用いた。 $\sigma_y$  も同様に計算され、円形断面をもつビームでは、 $a = 2\sigma_x = 2\sigma_y$  となる。 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  とし、また  $r = \sigma$  とすると、式 (5.34) より、rms ビームサイズについてのビームエンベロープ方程式は、

$$\sigma'' = \frac{K}{4} \frac{1}{\sigma} \quad (5.37)$$

となる。

この結果を使うと、外部電磁場がある場合のビームエンベロープ方程式は、式 (4.38) の中で  $r = r_m$  としたものに、エミッタンスによる項を表す式 (4.61) と、空間電荷による発散を表す項の式 (5.35) を加えたものとなる。一般に外部電磁場が与えられた場合には、粒子のエネルギーの変化が生じるため、 $\gamma = \text{const.}$  とはならない。この場合、エミッタンス  $\varepsilon$  はエネルギーに依存して変化してしまうため、あまり便利ではない。そこで、 $\varepsilon$  の代わりに粒子のエネルギーが変化しても不変となる規格化エミッタンス  $\varepsilon_n = \beta\gamma\varepsilon$  を用いる。最終的に求めたいビームエンベロープ方程式は

$$\begin{aligned} r_m'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2} r_m' + \frac{\gamma''}{2\gamma\beta^2} r_m + \left(\frac{qB}{2mc\beta\gamma}\right) r_m \\ - \frac{p_\theta^2}{m^2 c^2 \gamma^2 \beta^2} \frac{1}{r_m^3} - \frac{\varepsilon_n^2}{\beta^3 \gamma^2} \frac{1}{r_m^3} - K \frac{1}{r_m} = 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

となる。また、ビームの半径  $r_m$  の代わりに、rms ビームサイズ  $\sigma$  を用いると、

$$\begin{aligned} \sigma'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2} \sigma' + \frac{\gamma''}{2\gamma\beta^2} \sigma + \left(\frac{qB}{2mc\beta\gamma}\right) \sigma \\ - \frac{p_\theta^2}{m^2 c^2 \gamma^2 \beta^2} \frac{1}{\sigma^3} - \frac{\varepsilon_n^2}{\beta^3 \gamma^2} \frac{1}{\sigma^3} - \frac{K}{4} \frac{1}{\sigma} = 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

となる。

次のセクションで、この空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式から、エミッタンスの時間発展を紹介する。

## 6 空間電荷効果による投影エミッタンスの増大

ここでは、セクション 5.3 で導入した、空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式を使って、平衡状態からの微小な振動を考え、エミッタンスが増減することを示す。その後、ソレノイドによる投影エミッタンスの補償の原理について説明する。

### 6.1 エミッタンスの増減

ここでは、Serafini と Rosenzweig が示した方法 [17, 18] を用いて、投影エミッタンスが増減することを示す。

投影エミッタンスの増減を示すモデルとして、円筒対称性を持ち、相対論的な速度で運動する連続ビームを考える。このようなビームの運動は、空間電荷効果を含んだビームエンベロープ方程式 (5.38) を用いて、

$$\sigma'' + \frac{\gamma'}{\gamma\beta^2}\sigma' + K_r\sigma - \frac{\varepsilon_n^2}{\beta^3\gamma^2}\frac{1}{\sigma^3} - \frac{I}{2I_0\beta^3\gamma^3}\frac{1}{\sigma} = 0 \quad (6.1)$$

と表される。ここで、 $\sigma$  は  $r$  方向の rms ビームサイズであり、 $K_r$  はソレノイド、あるいは RF 電磁場による収束作用を表す係数である。ここでは、簡単のために一様な収束力  $K_r = \text{const.}$  の下での運動を考える。また、初期の円周方向運動量はゼロ ( $p_\theta = 0$ ) とする。ビームは外部電磁場により加速されない ( $\gamma' = 0$ ) と仮定し、また、ビーム内では空間電荷効果が支配的であるとして、右辺第 2 項と、右辺第 4 項のエミッタンスによる項を無視する。このとき、ビームエンベロープ方程式は、

$$\sigma'' + K_r\sigma - \frac{I(\zeta)}{2I_0\beta^3\gamma^3}\frac{1}{\sigma} = 0 \quad (6.2)$$

となる。ここで、ビームはバンチ化されているとして、バンチの中心からの進行方向の距離を  $\zeta$  として、バンチのスライス毎にビーム電流  $I(\zeta)$  を持つと考えられている。 $\sigma'' = 0$  (Brillouin flow) とすると、あるスライスでのビームサイズは、

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{I(\zeta)}{2K_r I_0 \beta^3 \gamma^3}} \quad (6.3)$$

と計算される。ビームはこの  $\sigma_{eq}$  の周りで微小な振幅  $\delta\sigma$  で運動すると考え、1 次の項のみを残して、

$$\sigma(z, \zeta) = \sigma_{sq}(\zeta) + \delta\sigma(z) \quad (6.4)$$

と展開できるとする。これを式 (6.2) に代入すると、 $\delta\sigma$  についての方程式は

$$\delta\sigma'' + 2K_r\delta\sigma = 0 \quad (6.5)$$

となる。これは、角振動数  $\sqrt{2K_r}$  を持つ、単振動を表す。 $K_r$  はスライスの位置  $\zeta$  に依存しない。初期条件  $\sigma(0, \zeta) = \sigma_{eq}(\zeta) + \delta\sigma(\zeta) = \sigma_0$ 、 $\sigma'(0, \zeta) = 0$  を持つ場合、式 (6.5) の解は、

$$\sigma(z, \zeta) = \sigma_{eq}(\zeta) + \delta\sigma(\zeta) \cos(\sqrt{2K_r}z), \quad (6.6)$$

$$\sigma'(z, \zeta) = -\sqrt{2K_r}\delta\sigma(\zeta) \sin(\sqrt{2K_r}z) \quad (6.7)$$

と表される。位相空間では、この運動は  $\sigma_{eq}$  を中心とした楕円で表される。

次に、 $(\sigma, \sigma')$  を用いて、投影エミッタンスが増減することを簡単なモデルを例として紹介する。ビームスライスでの平均を  $\langle \rangle$  とすると、 $(\sigma, \sigma')$  を用いて rms エミッタンスは、

$$\varepsilon(z) = \sqrt{\langle \sigma^2 \rangle \langle \sigma'^2 \rangle - \langle \sigma \sigma' \rangle^2} \quad (6.8)$$

と計算することができる。ここでは、議論を簡単にするために、ビームは 3 つのスライスから構成されると考える。各スライスはビーム電流  $I_1, I_2, I_3$  を持つとし、 $I_1 < I_2 < I_3$  とする。また、ビームの初期値はどのスライスでも  $(\sigma, \sigma') = (\sigma_0, 0)$  を持つと仮定する。このとき、3 つのスライスから計算される投影エミッタンスはゼロである。各スライスの中心ビームサイズ  $\sigma_{eq}$  は、スライスのビーム電流  $I(\zeta)$  に依存するため、図 20 に示すように位相空間中での楕円の中心位置はスライスによって異なる。位相空間での運動は、 $\sigma_{eq}$  を中心に楕円を描くが、 $\delta\sigma$  の角振動数  $\sqrt{2K_r}$  は、ビーム電流には依存しないため、各スライスは同じ各振動数で振動することになる。図 21 に、各スライスが位相  $\sqrt{2K_r}z = 0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$  を持つときの位相空間内での変化を示す。位相が 0 のときは、3 つのスライスが作る面積はゼロである。位相が  $\pi/2$  になるとスライスが作る面積は最大になる。その後、位相  $\pi$  でゼロになった後、再度  $3\pi/2$  で最大値を取り、またゼロに戻るようになる。

ここで取り扱った簡単なモデルの場合には、空間電荷効果の影響により、ビームが進行するに従い投影エミッタンスの増減が起きることを示した。同様の投影エミッタンスの増減は、DC 電子銃や入射器に対しての計算機シミュレーションでも観測される [19]。

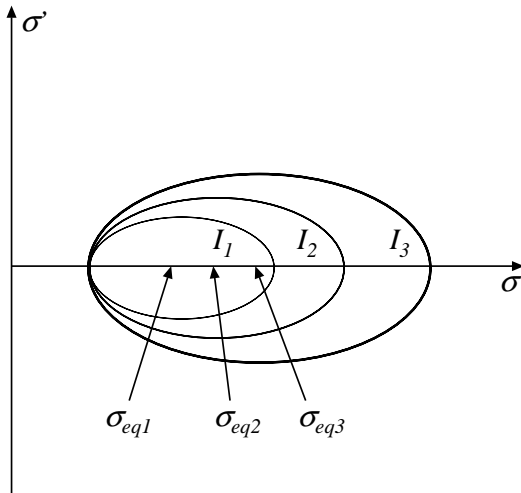


図 20: 3つのスライスがある場合の位相空間  $(\sigma, \sigma')$ 。各スライスのビーム電流は、 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 。

## 6.2 ソレノイドによる投影エミッタンスの補償

セクション 6.1 で見たように、一様な収束力の中では、投影エミッタンスが増減することがわかった。ERL 入射器の場合にも、電子銃で生成されたバンチは、バンチの前後で空間電荷効果による横方向の発散力が異なるため、各スライスでの位相空間分布のずれが生じ、投影エミッタンスが増大していく。これを抑制するために、電子銃の後にソレノイドを設置し収束力を与え、投影エミッタンスを回復させるようにしている。ここでは、ERL 入射器用の電子銃で使われるソレノイドによる投影エミッタンスの補償の原理について説明する。セクション 6.1 での議論との違いは、ERL 入射器の場合には、一様な収束力が与えられるわけではなく、ソレノイドのある部分でのみ収束力が与えられるということである。このため、実際の入射器の設計では、ソレノイドの位置が重要となる。

まず、バンチ化されたビームでの、横方向空間電荷力による投影エミッタンスの増大を考える。この様子を、図 22 の (a)、(b) に示す。(a) は電子銃直後の横方向の位相空間分布で、 $x'$  の拡がりはカソード表面での温度等によって生じたものである。電子銃直後ではエネルギーが低いため、空間電荷効果による発散力の影響が強く働き、位相空間での分布の回転と変形が生じる。バンチ化されたビームでは、バンチ中央と前後では電荷密度が異なるために、異なる発散力により、各スライスでは位相空間分布にず

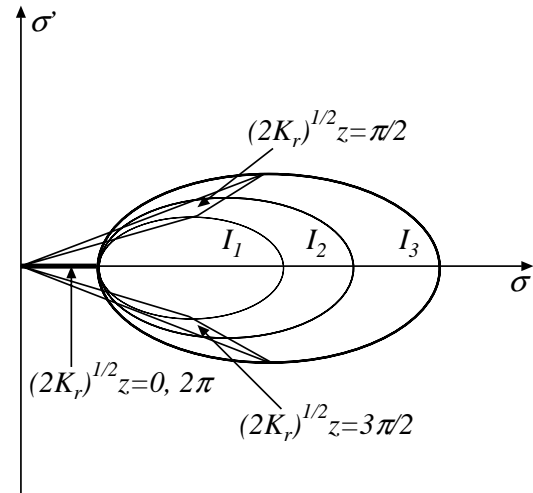


図 21: 3つのスライスがある場合の投影エミッタンスの変化。各スライスが位相  $\sqrt{2K_r}z = 0, \pi/2, 3\pi/2, 2\pi$  を持つときの位相空間内での変化を示す。

れが生じることになる。バンチ中央では電荷密度が高いため、バンチの先端および終端に比べて、より位相空間分布の傾きが大きくなる。ソレノイド入口まで自由空間を進行したとき、各バンチスライスの位相空間分布にはずれが生じ、投影エミッタンスの増大が発生する。

このバンチがソレノイドを通過したときの位相空間分布が、図 22 の (c) である。ソレノイドによる力は、発散の大きさ  $x'$  の大きさに比例した収束力となり、位相空間での分布の回転を引き起こすことになる。適切なソレノイドの強さを選ぶことにより、図 22(c) に示すような方向に分布を回転させることができる。ただし、ソレノイド直後ではまだ各スライス毎の分布の不一致は残っているために、投影エミッタンスは最小に到達していない。

ソレノイドの出口から、適切な距離を進むと、図 22(d) に示すように各スライスの分布が一致し、投影エミッタンスが最小になる。以上がソレノイドによる投影エミッタンス補償の原理である。

ここで、注意が必要なのは、投影エミッタンスが最小になる位置は、空間電荷力の強さ、ソレノイドの強さと位置、そしてエミッタンスを測定する位置に依存するという点である。さらに、最小になった位置からバンチが進行すると、また投影エミッタンスの増大が生じ始めるということがある。このため、どこで投影エミッタンスを最小にするかが重要となる。ERL 入射器では、入射器の後に

続く周回部の主加速空洞の位置で投影エミッタンスが最小になるようにするのが望ましい。これは、エネルギーが高くなれば空間電荷力による横方向の力は相対的に弱くなり、その力を無視できるようになるため、加速空洞の位置で最小になるようにしておけば、最小エミッタンスを保持したまま周回部を進むことができるからである。

現実の ERL 入射器では、RF 電磁場による投影エミッタンスの増大などもあり、最小エミッタンスを得るための設計には、計算機シミュレーションによる方法が用いられる。セクション 7 では、空間電荷効果を含んだビームの計算機シミュレーションについて紹介する。

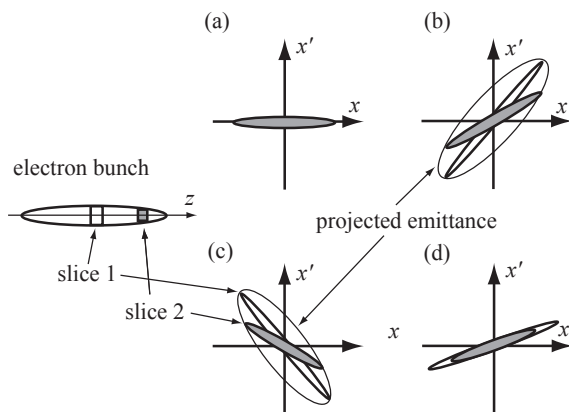


図 22: ソレノイド電磁石による投影エミッタンス補償の原理。(a) 電子銃から電子ビームが生成された直後。 $\sigma'_x$  は電子生成時に生じたものである。(b) ソレノイド入口。空間電荷効果により、スライスエミッタンスの不一致、つまり投影エミッタンスの増大が起きる。(c) ソレノイド出口。発散の大きさに比例した収束力を受け、位相空間での分布の回転が起きる。(d) ソレノイド下流。ある適切な距離自由間を進むと、スライスエミッタンスの不一致が解消され、投影エミッタンスが最小になる。

## 7 空間電荷効果の数値計算

空間電荷効果は、連続ビーム近似や特別な分布関数に対しては解析的に扱うことができるが、実際の加速器中での影響を解析的に扱うことは難しい。そのため、多くの場合には数値計算によって空間電荷効果の影響が調べられている。ここでは、空間電荷効果計算コードについて紹介した後、幾つかの空間電荷計算法について紹介する。また、CERLの入射器を例にとり、計算例も紹介する。

### 7.1 空間電荷効果を含んだシミュレーションコード

ERLでは、典型的に1.3 GHzの周波数で、100 mAのビームを考えている。このとき、一つの電子バンチ内には、 $Q = -77$  pCの電荷が含まれることになる。これより、電子バンチ内の電荷数を計算すると、 $N = Q/e = 4.8 \times 10^8$ と膨大な数となる。仮に、数値計算でこれら全ての電子間のCoulomb相互作用を直接計算すると、それは1タイムステップあたり、 $\sim N^2$ となってしまう、現実的ではない。このため、電子バンチの数値シミュレーションを行うには、電子バンチを表現するための他の方法が必要である。この方法としては、多くの場合次の2つの方法が用いられる。一つは、電子バンチを進行方向にスライスして、小さい幅を持つ多数の円筒スライスの集まりとして表現する方法である。もう一つは、同じ $e/m$ を持ったマクロ粒子の集まりとして記述する方法である。電荷 $Q$ を持つバンチを、 $N_m$ 個のマクロ粒子で表現すると、一つのマクロ粒子あたりの電荷は $Q/N_m$ となる。マクロ粒子の個数の取り方については、Debye長を計算して、空間電荷効果による電磁場が空間的に滑らかに記述できるかを考慮しておく必要がある。

空間電荷効果を含んだビームシミュレーションは、次のような3つのレベルに分けられる [20]。

1. 円筒スライスを用いた準解析的コード（スライス内では電荷密度が一定として、空間電荷効果による電磁場の非線形性を無視）
2. マクロ粒子を用い、ビームの静止系で静電場を計算するコード
3. 遅延ポテンシャルの効果を取り入れたコード（Lienard-Wiechertポテンシャルを用いる）

レベル1の場合は、ビームを荷電粒子の集団としてではなく、円筒スライスの集まりと考える。スライス内では、進行方向、横方向ともに電荷密度が一定と仮定している。このとき、空間電荷効果による非線形な電磁場は無視することができる。スライスの運動は、各スライスの半径方向の大きさ（エンベロープ）の変化と進行方向の幅の変化により記述される。この方法の利点は、バンチを何個のスライスに分割するかに依存するが、基本的に取り扱うスライス数は少ないため、計算が高速であるということである。このため、円筒対称性があるビームに対して、パラメタ探索などの高速な計算が要求される場合に適している。

レベル2の場合は、ビームをマクロ粒子の集団として取り扱う。空間電荷効果の計算には、粒子分布を実験室系からビームの静止系にLorentz変換し、静止系での電荷分布から静電場を計算する方法である。静止系での静電場が求まった後は、逆Lorentz変換により静止系での静電場を実験室系での電磁場に変換し、粒子に相互作用を与え、時間発展させる。静電場の計算は、電荷密度からPoisson方程式を解く方法や、静止系でのマクロ粒子間でのCoulomb相互作用を全ての粒子について計算するという方法がある。これらの計算で、前提となるのが、ビームの静止系を定義できるということである。エネルギー拡がりのないビームの場合には、厳密にビームの静止系を定義できるが、エネルギー拡がりがある場合には、厳密には静止系を定義できない。このため、レベル2の方法を用いる場合には、エネルギー拡がりを考慮する必要がある。この方法の利点は、マクロ粒子の数を増やせば、複雑な分布を表現できるということである。また、静電場の計算方法も幾つか選択できるため、比較的高速な計算も可能である。ただし、この方法では遅延ポテンシャルの影響が考慮されていないので、より厳密に計算するにはレベル3の方法を使用する必要がある。

レベル3の場合は、Lienard-Wiechertポテンシャル解くことで、遅延効果を取り入れる。このため、レベル3の方法では、余計な仮定が含まれていないために、厳密な計算が可能である。しかし、一般に計算に時間が掛かるために、高速にパラメタ探索をしたい場合などには向かない。

空間電荷計算を含んだシミュレーションコードの代表的なものは、

1. HOMDYN (レベル1)[21]

2. ASTRA (レベル 2、円筒対称ビーム)[22]
3. Parmela (レベル 2、円筒対称ビーム、3次元空間電荷効果)[23]
4. GPT (レベル 2、3次元空間電荷効果)[24]
5. TREDI (レベル 3)[25]
6. PETAR (レベル 3)[26]

である。これ以外にも多くの空間電荷計算を含んだコードが開発されているが、全てを紹介することはできないので、よく使われているコードを紹介するに留めた。

次に、マクロ粒子を使った粒子追跡計算での空間電荷の計算方法について、一般によく用いられているレベル 2 の方法について紹介する。これらの空間電荷の計算では、正確に計算することも必要であるが、また出来るだけ早く計算することも重要となってくる。それぞれの空間電荷の計算方法には、長所と短所があり、対象とする系および重要な物理現象を見極めて、適した計算コードを使用することが重要である。

## 7.2 点電荷間の力を計算する方法

空間電荷を含んだビームをシミュレートするコードでは、多くの場合、マクロ粒子を用いた粒子トラッキングが使われる。ここでは、点電荷間の相互作用を直接計算する方法を紹介する。点電荷間の力の直接計算では、ビームを構成する 2 つのマクロ粒子をその静止系に Lorentz 変換した後に、Coulomb の法則から静電場を計算し、再びそれを実験室系に逆 Lorentz 変換することにより、空間電荷効果を計算する。長所は、粒子の静止系での静電場を求めるにあたって、電荷密度や電磁場の平均化などの近似を導入していないということが挙げられるが、一方、粒子数が増えた場合には計算が膨大に増えるために、計算時間が長くなるという短所がある。また、マクロ粒子の数が少ない場合には、粒子間距離が近い場合に相互作用が非常に強くなる場合があり、数値的なノイズが生じるということがあるので、注意が必要である。

空間電荷効果を点電荷間の相互作用で計算する流れは次のようになる。ここで、ビームは電荷  $Q$  を持つ  $N$  個のマクロ粒子から構成されるとする。二つのマクロ粒子  $i$  と  $j$  を考え、マクロ粒子  $j$  が  $i$  の位置に

作る電磁場を求める。実験室系で二つの粒子の位置は、 $\mathbf{r}_i$ 、 $\mathbf{r}_j$  で表されるとすると、粒子間の距離は

$$\mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \quad (7.1)$$

となる。これを粒子  $j$  の静止系から見ると、粒子間の距離は、

$$\mathbf{r}'_{ji} = \mathbf{r}_{ji} + \frac{\gamma_j^2}{\gamma_j + 1} (\mathbf{r}_{ji} \cdot \boldsymbol{\beta}_j) \boldsymbol{\beta}_j \quad (7.2)$$

となる。ここで、 $\boldsymbol{\beta}_j$  は粒子  $j$  の速度ベクトル、 $\gamma_j = 1/\sqrt{1 - |\boldsymbol{\beta}_j|^2}$  は Lorentz 因子である。粒子  $j$  の静止系では、静電場のみが存在し、Coulomb の法則より、

$$\mathbf{E}'_{ji} = \frac{Q \mathbf{r}'_{ji}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}'_{ji}|^3} \quad (7.3)$$

と計算される。これを逆 Lorentz 変換して、実験室系での電磁場を求めると

$$\mathbf{E}_{ji} = \gamma_j \left[ \mathbf{E}'_{ji} - \frac{\gamma_j}{\gamma_j + 1} (\boldsymbol{\beta}_j \cdot \mathbf{E}'_{ji}) \boldsymbol{\beta}_j \right] \quad (7.4)$$

$$\mathbf{B}_{ji} = \frac{\gamma_j \boldsymbol{\beta}_j \times \mathbf{E}'_{ji}}{c} \quad (7.5)$$

となる。これで、実験室系で粒子  $j$  が粒子  $i$  の位置に作る電磁場が求まった。ビームは  $N$  個の粒子から構成されるとしたので、ビーム全体が  $i$  の位置に作る電磁場は、自分自身を除いた  $N - 1$  に対して上記の計算を繰り返し、足し合わせることで、

$$\mathbf{E}_i = \sum_{j \neq i} \gamma_j \left[ \mathbf{E}'_{ji} - \frac{\gamma_j}{\gamma_j + 1} (\boldsymbol{\beta}_j \cdot \mathbf{E}'_{ji}) \boldsymbol{\beta}_j \right] \quad (7.6)$$

$$\mathbf{B}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\gamma_j \boldsymbol{\beta}_j \times \mathbf{E}'_{ji}}{c} \quad (7.7)$$

と計算される。この電磁場から粒子  $i$  に対する力を計算し、次の時間ステップの粒子位置を計算する。これをマクロ粒子全てに対して繰り返すと、1 ステップの計算が終了する。すなわち、1 ステップの間に  $N(N - 1)$  の計算が必要となる。粒子数が増大した場合には、計算回数はほぼ  $N^2$  になるため、計算時間が増大する。

## 7.3 ビームの静止系に設置した格子上で静電場を計算する方法

点電荷間の相互作用を直接計算するコードでは、近似が含まれていないという利点があるが、粒子数が

増加したときの計算時間の問題、また粒子間の距離によっては数値的なノイズが生じるという問題がある。点電荷間の相互作用を計算する方法の他に、空間電荷を計算するためによく使われる方法として、ビームの静止系で静電場を計算する方法がある。この方法では、マクロ粒子から構成されるビームをその静止系に Lorentz 変換した後に、ビームを含む空間上に格子を作成し、その格子上で電荷密度を計算し、それから Poisson 方程式を解くことにより、静電場を求める。求めた格子上の静電場を逆 Lorentz 変換により、実験室系での電磁場に変換し、各マクロ粒子に加わる力を求める。この方法では、空間上に格子を作るため、格子間隔内では粒子分布が平均化され、点電荷間の力の計算のような意図しない衝突的な力の影響を避けられる。しかしながら、格子間隔によっては細かい粒子分布の影響が見えなくなってしまう場合もあるので、格子サイズとマクロ粒子数の選び方が重要となる。また、Lorentz 変換をするにあたってビームの静止系というものを考えたが、ビームのエネルギー拡がり大きい場合、ビームの平均速度の系に Lorentz 変換してもエネルギーのずれた粒子はその静止系に対して速度をもつことになり、静電場のみが現れる前提が正しくなくなる。このため、この方法はビームのエネルギー拡がり大きい場合には使えないので、注意が必要である。

ビーム静止系の格子上で静電場を計算する流れは次のようになる。

1. ビームの静止系を求める
2. ビームを構成するマクロ粒子の位置と速度 ( $r_i, u_i$ ) を、ビームの静止系に Lorentz 変換する ( $r'_i, u'_i$ )
3. ビームの静止系で、ビームを含む空間中に格子を作成し、格子点上での電荷密度  $\rho$  を計算する
4. 電荷密度  $\rho$  に対して Poisson 方程式を解き、静電ポテンシャル  $V$  を計算する
5. 静電ポテンシャル  $V$  から、各粒子の位置での静電場  $E'_i$  を求める
6. 求めた静電場  $E'_i$  を逆 Lorentz 変換して、実験室系での電磁場を求める
7. 実験室系での電磁場からマクロ粒子に加わる力を計算し、次の時間ステップの粒子の位置と速度を計算する

この流れに従って、計算方法を紹介する。まず始めに、ビームの静止系を定義する。ビームのエネルギー拡がり有限である場合には、厳密にマクロ粒子が静止して見える系は存在しない。しかし、ここではビームのエネルギー拡がり十分小さいとして、静止系とみなせるような系があると考えられる。そのような静止系の実験室系に対する速度  $\beta_0$  は、

$$\beta_0 = \frac{\sum \gamma_i \beta_i}{\sum n_i \gamma_i} \quad (7.8)$$

と表される。ここで、マクロ粒子に番号  $i$  をつけ、マクロ粒子内での電子数を  $n_i$ 、実験室系での粒子の速度ベクトルを  $\beta_i$ 、Lorentz 因子を  $\gamma_i$  とした。また、和は、 $n = 1$  からマクロ粒子の総数  $N$  まで計算される。静止系についての規格化運動量  $\gamma_0 \beta_0$ 、および Lorentz 因子  $\gamma_0$  は、静止系の速度  $\beta_0$  から

$$\gamma_0 \beta_0 = \frac{\beta_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \quad (7.9)$$

$$\gamma_0 = \sqrt{1 + \gamma_0^2 \beta_0^2} \quad (7.10)$$

と計算される。 $\gamma_0$  を用いると、実験室系でのマクロ粒子の位置  $r_i$  は、Lorentz 変換により、ビームの静止系での位置  $r'_i$ 、

$$r'_{i\parallel} = \gamma_0 r_{i\parallel}, \quad (7.11)$$

$$r'_{i\perp} = r_{i\perp} \quad (7.12)$$

に変換される。ここで、 $r_{\parallel}$  はビーム進行方向の位置座標、 $r_{\perp}$  は進行方向に垂直な方向の座標である。これら二つをあわせると、粒子の座標は

$$r'_i = r_i + \frac{r_i \cdot \gamma_0 \beta_0}{\gamma_0 + 1} \gamma_0 \beta_0 \quad (7.13)$$

と変換される。また、粒子の速度は

$$u'_{i\parallel} = \frac{u_{i\parallel}}{(1 - \beta_u \cdot \beta_0)}, \quad (7.14)$$

$$u'_{i\perp} = \frac{u_{i\perp}}{\gamma_0 (1 - \beta_u \cdot \beta_0)} \quad (7.15)$$

と変換され、まとめると

$$u' = \frac{c}{\gamma_u \gamma_0 - \gamma_u \beta_u \cdot \gamma_0 \beta_0} \times \left[ \left\{ \frac{\gamma_u \beta_u \cdot \gamma_0 \beta_0}{\gamma_0 + 1} - \gamma_u \right\} \gamma_0 \beta_0 + \gamma_u \beta_u \right] \quad (7.16)$$

と表すことができる。ここで、 $\beta_u = u/c$ 、 $\gamma_u = 1/(1 - \beta_u^2)^{1/2}$  である。また、静止系でのマクロ粒子の Lorentz 因子は

$$\gamma_{u'} = \gamma_0 \gamma_u (1 - \beta_0 \beta_u) \quad (7.17)$$

と定義することができるが、これがある程度以上大きい場合には、静止系での粒子の速度差が無視できなくなるため、注意が必要である。

次に、静止系でビームを取り囲む空間上に境界ボックス  $\Omega$  を設定し、その中に格子を作る。そして、粒子分布  $(r'_i, u'_i)$  から格子点上での電荷密度  $\rho(r')$  を求める。格子の取り方は、等間隔格子や非等間隔格子などがある。格子を設置する際に重要となるパラメータは、格子の総数である。格子の数が増えれば、より空間的に細かい情報が含まれることになるが、あまりに格子数を増やすと、電荷密度  $\rho(r')$  が不連続（一つのセル内に粒子が数個しか入らなくなる）になり、また格子点の数が増えるため長い計算時間が必要となる。従って、マクロ粒子の総数と要求する精度から、格子の数と間隔（あるいは境界ボックスの大きさ）を適切に設定する必要がある。

この電荷密度  $\rho(r')$  から Poisson 方程式

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.18)$$

を解いて、静止系の静電場を求めることになる。ここでは、Poisson 方程式の解き方の詳細については触れないので、数値計算の文献などを参照して欲しい。ここでは、Poisson 方程式を解く際に重要となる、境界条件について紹介しておく。Poisson 方程式は、境界ボックス  $\Omega$  内に設置された格子上で解かれるが、この  $\Omega$  の取り方と  $\Omega$  上での境界条件の取り方が重要となる。境界条件には、Dirichlet 境界条件 ( $\partial\Omega$  上で  $V = 0$ )、Open 境界条件 ( $\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0$ )、Neumann 境界条件 ( $\partial\Omega$  上で  $\partial V / \partial r' = 0$ ) がある。ここで、 $\partial\Omega$  は境界を囲む境界面を表す。Dirichlet 境界条件は、境界上で  $V = 0$  となり導体表面を表すことになる。ビームが金属製の真空チェンバー内を進行する場合には、Dirichlet 境界条件を使用し、境界ボックスを真空チェンバーと同サイズに取ることで、導体表面の影響を表現することができる。ただし、境界ボックスを大きく取り、さらに格子数を増やすと、長い計算時間が必要となる。真空チェンバー表面での導体の影響を無視する場合には、Open 境界条件を使うことにより表現できる。このように、対象とする物理現象に合わせて境界条件と境界ボックスのサイズを選択する必要がある。また、境界条件は Poisson 方程式を数値的に解く場合の安定性にも影響するので、注意する必要がある。

Poisson 方程式を解いて得られた静電ポテンシャル

$V$  から、静止系での静電場は、

$$\mathbf{E}' = -\nabla V \quad (7.19)$$

と計算される。 $\mathbf{E}'$  は格子点上での  $V$  から計算されるため、各マクロ粒子上での静電場  $\mathbf{E}'(r'_i) = \mathbf{E}'_i$  は、 $r_i$  の周りの格子点上の値から内挿して計算しなければならない。

最後に、実験室系における粒子  $i$  の位置での電磁場を求めるために、静止系での静電場  $\mathbf{E}'_i$  を逆 Lorentz 変換する。 $i$  での電磁場は、

$$\mathbf{E}_i = \gamma_0 \left[ \mathbf{E}'_i - \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1} (\boldsymbol{\beta}_0 \cdot \mathbf{E}'_i) \boldsymbol{\beta}_0 \right] \quad (7.20)$$

$$\mathbf{B}_i = \frac{\gamma_0 \boldsymbol{\beta}_0 \times \mathbf{E}'_i}{c} \quad (7.21)$$

と計算される。この電磁場を用いて、各粒子に加わる力を計算し、次の時間ステップでの各粒子の位置と速度を計算する。以上が、静止系の格子上で空間電荷効果を計算する流れである。

この方法での利点は、電荷密度を連続として扱うために、点電荷間の相互作用を直接計算する方法に比べて高速であるということがある。ただし、ビームのエネルギー拡がり大きい場合には、一つの静止系を定義することができないために、注意が必要である。また、粒子密度が増大し、衝突的な力が支配的になる領域では、ここでの方法の滑らかな空間電荷力だけでは、正しい物理を取り入れたことにはならない。このため、対象とするビームの Debye 長を計算し、空間的に滑らかな空間電荷力が支配的か、あるいは衝突的な力も取り入れなければならないかを見極め、空間電荷の計算方法を選択する必要がある。

## 7.4 DC 電子銃のシミュレーション

ここでは、空間電荷効果を含んだ粒子トラッキングコード GPT を用いた計算例を紹介する。GPT は、マクロ粒子を用いたトラッキングコードで、空間電荷効果計算法として、点電荷間の力の計算する方法と、3次元非等間隔格子を用いてビームの静止系で静電場を計算する方法などを含む。ここでは、計算速度が比較的速い、格子上で静電場を計算する方法によって、空間電荷効果を計算した。

まず、JAEA-type の光電陰極 DC 電子銃でのビームの振る舞いを紹介する。計算に用いたビームラインを図 23 に示す。ビームラインは、電子銃、ソレノイド、自由空間によって構成される。シミュレーション



バンチ電荷	-80 pC
電子銃電圧	250 kV
初期分布	ピア缶分布 (図 3)
初期 $\sigma_x, \sigma_y$	0.5 mm
初期 $\sigma_t$	15 ps
初期分布の生成法	準乱数 [28]
空間電荷効果の計算	sc3dmesh [24]
マクロ粒子の数	20000

表 1: DC 電子銃ビームラインのシミュレーションでの初期条件

では、図 4 の電子銃と、図 6 のソレノイドが使用された。電磁場分布については、図 5 や図 7 のような 1 次元分布ではなく、電磁場解析コードである POISSON [27] によって計算された 2 次元分布が用いられた。シミュレーションの条件を表 1 に示す。ここで、 $\sigma_t$  は、光電陰極に入射されるレーザーのパルス幅 (rms 値) である。

図 24 に、ソレノイド磁場の強さをスキャンしたときの規格化 rms エミッタンスと rms ビームサイズの変化を示す。ここで、エミッタンス、ビームサイズは  $z = 1$  m の位置に仮想的に設置したスクリーン上での値である。図 24 が示すように、ソレノイドの強さが増加していくと、ビームサイズは減少し、ある位置で最小値を持ったあと、再び増加に転じる。一方、エミッタンスは複雑な振る舞いを示しており、単純にビームサイズの大きさから決まらないことがわかる。図 25 に、ソレノイド磁場が 0.025 T のときの、エミッタンスとビームサイズの時間発展を示す。電子銃から出たビームは、空間電荷効果により発散していくが、ソレノイドによる収束作用で収束していき、ある点で最小値を持ったあと、再びビームサイズが増大していく。エミッタンスは、電子銃から出た直後は増大する傾向にあるが、ソレノイド後には減少に転じていることがわかる。これは、セクション 6.2 で示した投影エミッタンスの補償による効果を示している。ソレノイド中で一度エミッタンスが急激に増大しているが、これはソレノイド中では横方向の運動量が与えられ、位相空間での分布が一時的に広がるためである。図 26 に、rms バンチ長の時間発展を示す。バンチ長は縦方向空間電荷効果によって時間発展とともに広がっていく。ERL 入射器では短いバンチ長のビームが必要となるが、このままではその要求を満たすことができない。そこで、入射器

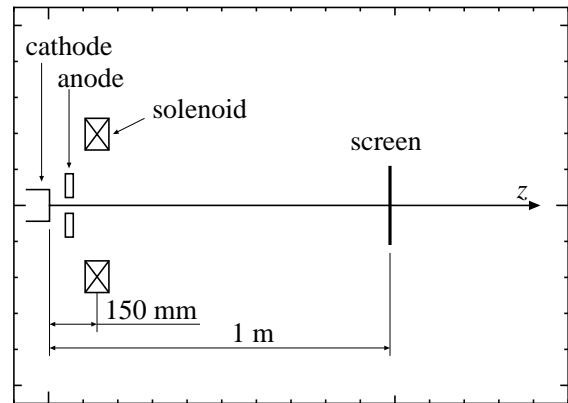


図 23: JAEA 250 kV 光電陰極 DC 電子銃を用いたビームラインのレイアウト。電子銃とソレノイドによって構成される。 $z = 1$  m の地点に仮想的なスクリーンを設置。

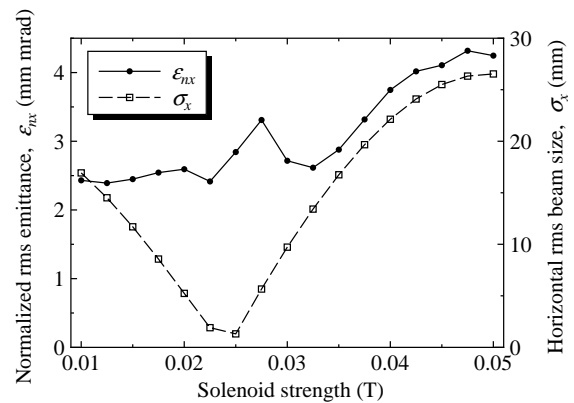


図 24: ソレノイドのスキャンしたときの規格化 rms エミッタンスと rms ビームサイズの変化。 $z = 1$  m の位置に設置したスクリーン上での値を示す。

ではソレノイドの後にパンチャーを設置して、セクション 4.5 で紹介した速度変調によるドリフトパンチングによって、バンチ長を圧縮する。図 27 に、ビームの運動エネルギーとエネルギー拡がりを示す。エネルギーは、電子銃の電場で加速された後は、当然であるが一定となる。ビームは進行中に縦方向空間電荷効果を受け続けることになるため、エネルギー拡がりは時間発展とともに増大していく。

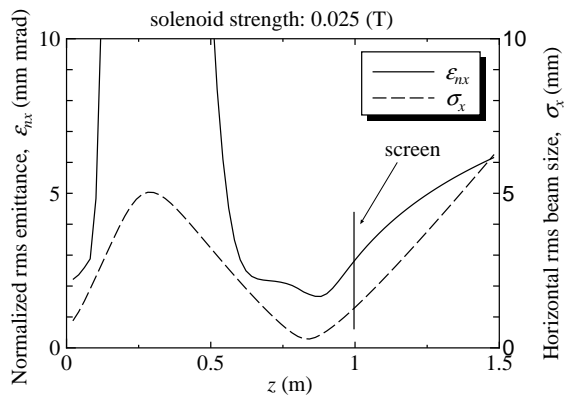


図 25: ソレノイド磁場が 0.025 T のときの、規格化 rms エミッタンスと rms ビームサイズの変化。横軸は、カソード表面からの距離を表す。

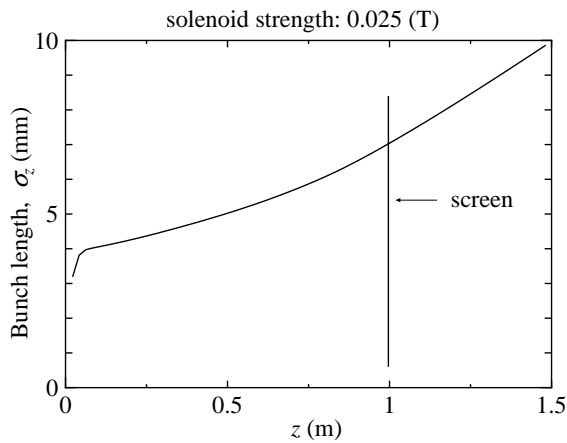


図 26: ソレノイド磁場が 0.025 T のときの、rms バンチ長の変化。

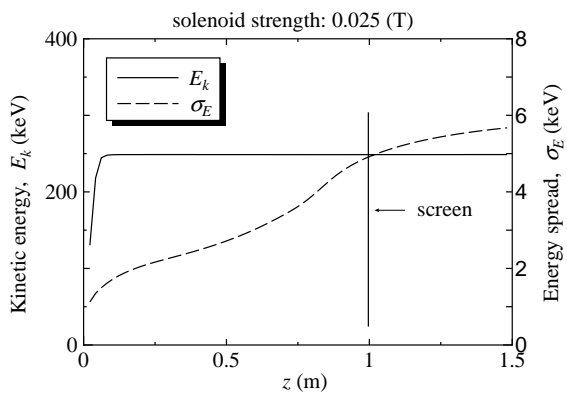


図 27: ソレノイド磁場が 0.025 T のときの、ビームの運動エネルギーとエネルギー拡がりの変化。

## 7.5 CERL のシミュレーション

次に、GPT を用いて、CERL 入射器について計算した結果について紹介する。シミュレーションで用いたビームラインを図 28 に示す。500 kV 光電陰極 DC 電子銃の後に、1 番目のソレノイド、バンチ圧縮用のバンチャー空洞、2 番目のソレノイドが設置され、その後に 2 セルの超伝導空洞が 3 台続く。このビームラインで調整可能なパラメタは、初期分布 ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_t$ )、電子銃電圧、ソレノイド 1 の強さ、ソレノイド 2 の強さ、バンチャーの加速電圧と位相、超伝導加速空洞 3 台についての位相と加速電圧の計 14 個である。入射器全体では、これらの他にマッチング部の 4 極電磁石の強さも加わり、多くの自由度があることになる。入射器の設計では、これらのパラメタを最適化する必要があるが、パラメタ数が多いということがこれを難しくしている。現実的な時間で最適化を行うためには、効率の良い探索方法が必要となる。入射器の最適化方法としては、これまでに遺伝的アルゴリズムを用いた方法など有力な方法が幾つか提案されており、入射器の設計に使われている [11, 29]。表 2 にシミュレーションの条件を示す。

バンチ電荷	-80 pC
電子銃電圧	500 kV
カソード表面の初期 $k_B T$	50 meV
初期分布	ピア缶分布 (図 3)
初期 $\sigma_x, \sigma_y$	0.21, 0.21 mm
初期 $\sigma_t$	13.3 ps
初期分布の生成法	準乱数 [28]
空間電荷効果の計算	sc3dmesh [24]
マクロ粒子の数	10000
ソレノイド 1 の強さ	0.034 T
ソレノイド 2 の強さ	0.014 T
バンチャー (電場)	1.17 MV/m
バンチャー (位相)	-90 degree
空洞 1 (電場)	9.57 MV/m
空洞 1 (位相)	-34 degree
空洞 2 (電場)	15.0 MV/m
空洞 2 (位相)	8 degree
空洞 3 (電場)	15.0 MV/m
空洞 3 (位相)	-2 degree

表 2: CERL 入射器ビームラインのシミュレーションでの初期条件。電場はピーク値を表し、位相はビームに対して最大加速を与える位相からの差として定義。

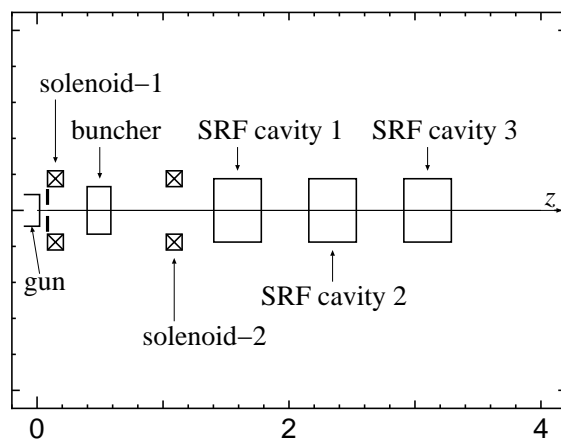


図 28: CERL 入射器ビームラインのレイアウト。電子銃と 2 台のソレノイド、バンチャー、3 台の 2 セル超伝導空洞によって構成される。

ここで、加速空洞の位相の定義は、ビームに対して最大加速を与える位相を 0 degree として、そこからの差としている。

図 29 に、規格化 rms エミッタンス、rms ビームサイズの変化を示す。エミッタンスは、ソレノイド 1 の後から減少し、超伝導加速空洞の出口ではほぼ一定となる。この場合、セクション 6.2 で議論したように、エミッタンスの最小値がくる位置が加速空洞出口となっており、入射器の後ろで低いエミッタンスを維持することができる。図 30 に、rms バンチ長の変化を示す。バンチ長は電子銃を出た後、縦方向空間電荷効果によって伸ばされるが、バンチャーによって速度変調が与えられた後は減少に転じる。入射器出口では、0.7 mm のバンチ長となる。図 31 に、ビームの運動エネルギーとエネルギー拡がりを示す。エネルギーは、加速空洞を通過するたびに増大していく。表 2 に示すように、1 番目の超伝導空洞の加速勾配が後ろの 2 台に比べて小さく、また最大加速を与える位相からずれているときに低いエミッタンスが得られている。このため、加速空洞によるエネルギー増加は 1 番目の空洞が他の 2 台の空洞に比べて低くなっている。エネルギー拡がりは、加速空洞の部分で増減を繰り返していることがわかる。特に 1 番目の超伝導空洞では、位相がずれているために大きなエネルギー拡がりが生じている。

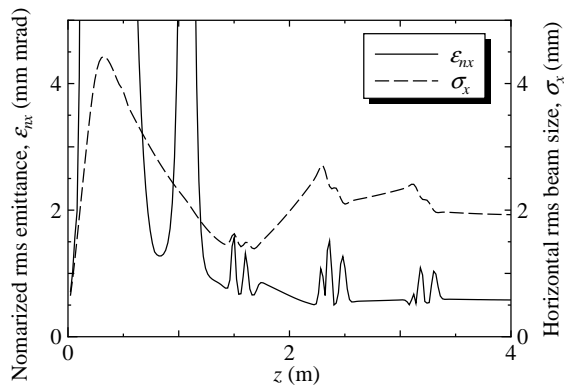


図 29: CERL 入射器中での規格化 rms エミッタンスと rms ビームサイズの変化。横軸は、カソード表面からの距離を表す。

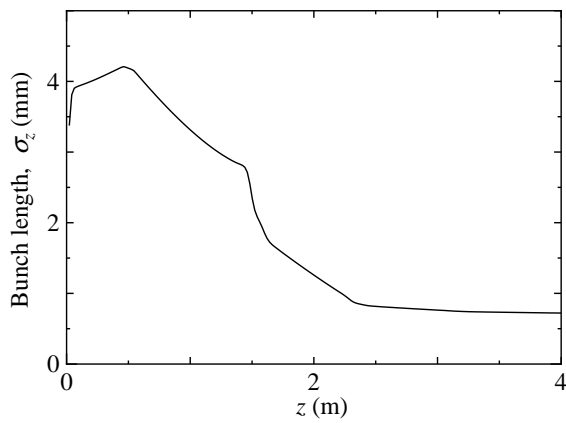


図 30: CERL 入射器中での rms バンチ長の変化。

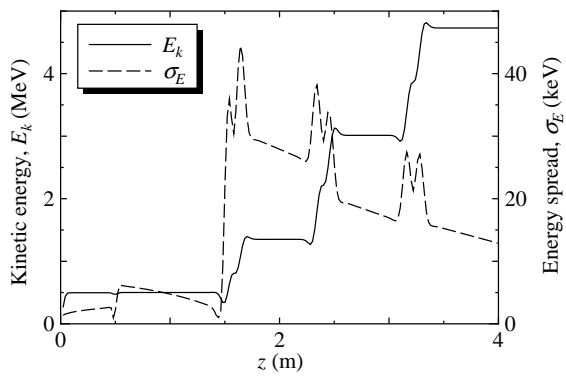


図 31: CERL 入射器中でのビームの運動エネルギーとエネルギー拡がりの変化。

## 8 合流部での物理

ERLの合流部は、入射器である程度のエネルギーまで加速されたビームを、主加速空洞のある周回部に繋ぐための部分である。この部分では、偏向電磁石を用いて入射器から来たビームを磁場により曲げて、周回部の軌道に合流するようにしている。合流部の最後ではビームの周回部を通ってきた高エネルギービームと入射器から来た低エネルギービームが合流することになる。

合流部手前までは、入射器を構成する要素は直線状に配置されるため、ビームの軌道が曲がることはない。このため、ビームにエネルギー拡がりが生じた場合にも、ビームは直進しているために、エネルギー拡がりが横方向の運動に影響を与えることはなかった。しかし、合流部では偏向電磁石によってビームが曲げられるため、エネルギー拡がりが分散関数を通して横方向の運動に影響を与えることになる。特に、空間電荷効果によって、ビームが合流部を通過する間にもエネルギー拡がりが増加する場合には、通常の分散関数を調整するだけでは、横方向の運動に対する影響を避けることが出来ない。そのため、合流部でのビームの物理を考える際には、空間電荷効果の影響を含んだ分散関数を考える必要がある。

また、合流部ではもう一つ重要な物理現象がある。それはCSRによるエネルギー拡がりの変化である。ERLでは短いバンチ長のビームが要求されるため、ビームのエネルギーが低い場合にも、CSRの影響を考慮する必要がある。

ここでは、空間電荷効果によるエネルギー拡がりがビームが走った距離に線形に依存すると仮定して、横方向の投影エミッタンスに与える影響を考る。また、合流部のようなビームエネルギーの低い( $\sim 10$  MeV)場合でのCSRの計算例を紹介する。

### 8.1 縦方向空間電荷力によるエミッタンス増大とその補償

ここでは、羽島によって提案された合流部での縦方向空間電荷力の線形解析 [13] について紹介する。

まず、考えている電子バンチが、合流部内でその横方向と縦方向の分布をほとんど変えないと仮定すると、縦方向空間電荷ポテンシャルは一定に保たれると考えることができる。このような仮定のもとでは、縦方向空間電荷力によって生じるエネルギー拡がりは、電子バンチが進んだ距離  $s - s_0$  に比例する

みなせる。ここで、 $s$  を理想軌道上でのビーム進行方向の電子バンチの座標、 $s_0$  を偏向電磁石入口の座標とした。以下の議論では、エネルギー拡がりというときに、ビームのエネルギー  $E_0$  で規格化された  $\delta = \delta_E/E_0$  を指すものとする。このような仮定のもとでは、線形近似による電子の水平方向の運動は、偏向電磁石の曲率半径を  $\rho$ 、 $x$  を理想軌道からの水平方向のずれとすると、

$$x'' = -\frac{x}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}(\delta_0 + \delta_{SC} + \kappa(s - s_0)) \quad (8.1)$$

と記述される。ここで、 $x'' = d^2x/ds^2$  である。 $\delta_{SC}$  は、合流部入口までの上流部で縦方向空間電荷力によって生じたエネルギー拡がりである。 $\delta_0$  は  $s = 0$  でのエネルギー拡がり、 $\kappa$  は要素中での縦方向空間電荷力による規格化されたポテンシャルである。このとき、合流部中での水平方向の運動は、

$$\mathbf{x} \equiv (x, x', \delta_0, \delta_{SC}, \kappa) \quad (8.2)$$

によって記述することができる。この5次元のベクトルの  $s_0 \rightarrow s_1$  についての時間発展は、1次の転送行列  $R(s_1|s_0)$  を用いて

$${}^t\mathbf{x}(s_1) = R(s_1|s_0){}^t\mathbf{x}(s_0) \quad (8.3)$$

と記述できる。この式は、エネルギー拡がりがある場合の運動を記述する、 $3 \times 3$  の行列を拡張したものであり、次のように書くことができる。

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

$L$  は要素の長さ、 $R_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$  は通常の  $3 \times 3$  の転送行列である<sup>2</sup>。曲率半径  $\rho$ 、曲げ角  $\theta$  をもつセクター型偏向電磁石の場合、 $R_{11} = \cos\theta$ 、 $R_{12} = \rho \sin\theta$ 、 $R_{13} = \rho(1 - \cos\theta)$ 、 $R_{14} = \rho(1 - \cos\theta)$ 、 $R_{15} = \rho^2(\theta - \sin\theta)$ 、 $R_{21} = -1/\rho \cdot \cos\theta$ 、 $R_{22} = \cos\theta$ 、 $R_{23} = \sin\theta$ 、 $R_{24} = \sin\theta$ 、 $R_{25} = \rho(1 - \cos\theta)$  となる。また、他の要素(自由空間、4極電磁石など)については、各要素の  $R_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$  と  $R_{14} = R_{15} = R_{24} = R_{25} = 0$  で記述される。この新たな  $5 \times 5$  の転送行列を用いると、次のように空間電荷分

<sup>2</sup>各要素での転送行列については、参考文献 [30] などを参照して欲しい。

散関数 ( $\zeta_x, \zeta'_x$ ) を定義することができる。

$$\begin{pmatrix} \zeta_x(s_1) \\ \zeta'_x(s_1) \\ 0 \\ L(s_1) \\ 1 \end{pmatrix} = R(s_1|s_0) \begin{pmatrix} \zeta_x(s_0) \\ \zeta'_x(s_0) \\ 0 \\ L(s_0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

ここで、 $L(s) = s$  は軌道長を表す。

この空間電荷分散関数 ( $\zeta_x, \zeta'_x$ ) を用いると、縦方向空間電荷力による位相空間 ( $x, x'$ ) 中での位置のずれは、

$$\mathbf{d} = (\kappa\zeta_x, \kappa\zeta'_x) \quad (8.6)$$

となり、空間電荷分散関数と空間電荷ポテンシャルの積によって記述される。このとき、合流部出口での各バンチスライスは、位相空間中の  $\zeta_x x' - \zeta'_x x = 0$  の直線状に整列する。この様子を図 32(a) に示す。

合流部出口におけるエミッタンスは、

$$\varepsilon^2 = (\varepsilon_0\beta_x + D)^2(\varepsilon_0\gamma_x + D'^2) - (\varepsilon_0\alpha_x + DD')^2 \quad (8.7)$$

で評価することができる。ここで、 $(\alpha_x, \beta_x, \gamma_x)$  は合流部出口における Courant-Snyder パラメタ、 $\varepsilon_0$  は合流部入口での初期エミッタンスである。 $(D, D')$  は位相空間中でのバンチスライスの rms 拡がりであり、

$$(D, D') \equiv \kappa_{rms}(\zeta_x, \zeta'_x) \quad (8.8)$$

から計算される。

このように、位相空間中での分布の傾きが、空間電荷分散関数によってバンチスライスが整列する方向とずれていると、図 32(a) に示すようにエミッタンスの増大が生じる。では、これを回避するにはどうすればよいか？合流部ではビーム光学関数を調整できる自由度がないため、合流部手前のマッチング部の 4 極電磁石を調整して、合流部出口でのビーム光学関数を調整してやればよい。合流部出口での位相空間の分布の傾きは、

$$\xi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\alpha_x}{\gamma_x - \beta_x}\right) \quad (8.9)$$

で与えられる。一方、縦方向空間電荷力によってバンチスライスが整列される方向は、

$$\xi_{LSC} = \arctan\left(\frac{\zeta'_x}{\zeta_x}\right) \quad (8.10)$$

で計算される。図 32(b) のように、 $\xi = \xi_{LSC}$  の場合には、分布の長軸とスライスが整列される方向が一致し、エミッタンスの増大が最小に抑えられる。こ

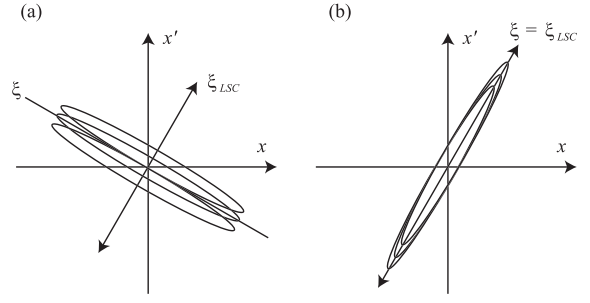


図 32: 合流部での縦方向空間電荷力による投影エミッタンスの増大とその補償。

れを実現するように合流部手前のマッチング部を調整必要がある。

また、CSR によるエネルギー拡がりによる効果も同様な線形近似によって解析することができ、CSR 分散関数を定義することができる [14]。現実の合流部では、これらの縦方向空間電荷分散関数と CSR 分散関数の効果を同時に最小にするようにしなければならない。

## 8.2 合流部での CSR の影響

ここでは、ERL 入射器合流部のようなエネルギーの低い領域での CSR について、Sagan による方法 [31] を用いて計算した結果を紹介する [32]。CSR の詳細については、島田氏のテキストや参考文献 [33] などを参照して欲しい。

### 8.2.1 GPT/CSR の開発

通常よく使用される CSR の 1 次元 wake 計算を含んだコード [35] では、超相対論的な条件が仮定されているため、ERL 入射器のような低エネルギー領域のビームダイナミクスに適用することができない。また、空間電荷効果と CSR の効果を全て含めてより厳密に計算するには、TREDI [36] や TraFic<sup>4</sup> [37] のように、Lienard-Wiechert ポテンシャルをセルフコンシステントに解くことが必要となるが、これは膨大な計算時間を必要とし、繰り返し計算を行うパラメタ最適化には向かない。これらの代わりに、合流部を含む ERL 入射器全体をシミュレートするために、空間電荷計算を含んだ粒子追跡コードである GPT [24] 用に、新たな CSR 計算ルーチン、GPT/CSR を開発した。GPT/CSR で使用しているアルゴリズム [34]

では、超相対論的な条件は仮定されておらず、入射器のような低エネルギー領域の合流部やシケインでのビームダイナミクスの計算にも適用することができる。

ここでは、GPT/CSR の有効性を示すために、円形軌道上での CSR によるエネルギー損失およびエネルギー拡がりを計算し、elegant による結果と解析的な結果とを比較する。また、3 台の偏向電磁石からなる合流部に対して、CSR によるエミッタンス増大を計算した結果についても紹介する

### 8.2.2 GPT/CSR による計算結果

GPT/CSR は Sagan [34] の方法を用いて、1 次元 CSR wake を計算する。この方法は、電子ビームが超相対論的であるという近似 ( $\gamma \gg 1$ ) を用いていないため、ERL 入射器のような 10 MeV 程度の低いエネルギー領域でも有効である。また、GPT/CSR は、任意のビーム軌道に対して、CSR wake を計算可能であり、安定状態だけでなく過渡状態も扱うことができる。さらに、GPT/CSR は、鏡像電荷を導入することにより、真空チェンバーによる CSR の遮蔽効果の影響も取り入れている。

### 8.2.3 エネルギー損失とエネルギー拡がり

GPT/CSR、elegant、解析式を用いて、半径  $\rho = 1.0\text{m}$  の円形軌道に対して、安定状態のエネルギー損失とエネルギー拡がりを計算した。この計算では、パンチ長  $\sigma_s = 0.6\text{mm}$ 、パンチ電荷  $-80\text{pC}$  とした。また、初期の粒子分布は進行方向、横方向ともに Gaussian 分布とした。図 33 に、エネルギー損失  $d\varepsilon/dt$ 、図 34 に、エネルギー拡がり  $d\sigma_s/dt$  の計算結果を示す。図 33 中での赤線は、C. Mayes [38] によって導出された解析式による計算結果である。

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{(r_e m_e c^2) c \beta^4 \gamma^4}{\rho^2} N (1 + (N-1)T(a)), \quad (8.11)$$

ここで、 $a = 3/2 \cdot \gamma \cdot 3\sigma_s / (\beta\rho)$  であり、

$$T(a) = \frac{9}{32\pi} \frac{1}{a^3} \left( e^{\frac{-1}{(8a^2)}} \sqrt{\pi} K_{5/6} \left( \frac{1}{8a^2} \right) - 2\pi a \right), \quad (8.12)$$

$K_{5/6}(x)$  は変形ベッセル関数、 $N$  はパンチ内での電子数、 $m_e$  は電子の質量、 $r_e$  は電子の古典半径、 $c$  は真空中での光速、 $\gamma$  はローレンツ因子で、 $\beta = (1 -$

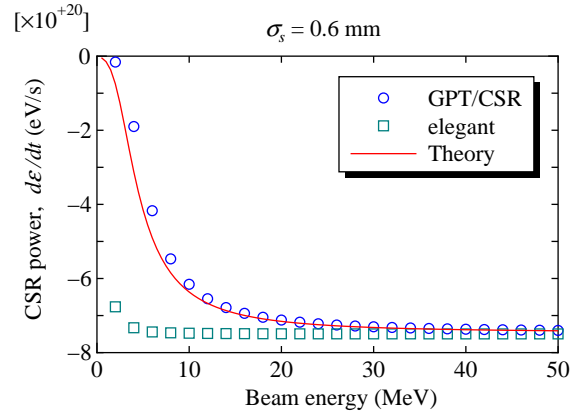


図 33: 安定状態での CSR によるエネルギー損失のビームエネルギー依存性。

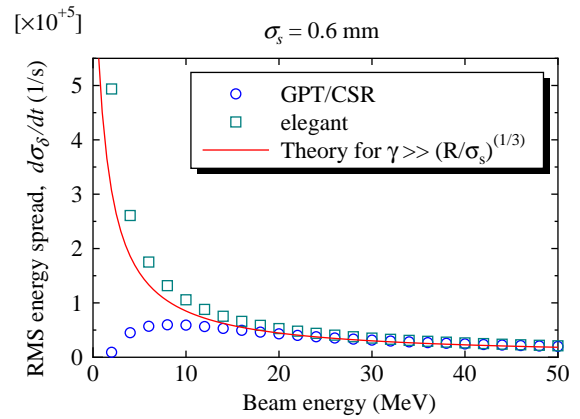


図 34: 安定状態での CSR によるエネルギー拡がりのビームエネルギー依存性。

$1/\gamma^2)^{1/2}$  となる。elegant は超相対論的な近似が用いられているため [35]、 $E_0 > 40\text{MeV}$  の場合に限り解析値と一致する。一方、図 33 に示されるように、GPT/CSR は全てのエネルギー領域において解析値と一致している。

図 34 の赤線は、 $\gamma \gg (\rho/\sigma_s)^{1/3}$  の場合の近似式 [39, 40] から得られたエネルギー拡がりである。

$$\frac{d\sigma_s}{dt} \approx 0.22 \frac{r_e N c \beta}{\gamma \rho^{2/3} \sigma_s^{4/3}}. \quad (8.13)$$

高いエネルギー領域 ( $E_0 > 40\text{MeV}$ ) では、GPT/CSR、elegant とともに近似式による結果を再現している。しかし、低エネルギー領域の極限 ( $E_0 \rightarrow 0$ ) では、近似式と elegant ではともに発散してしまう。これに対して、GPT/CSR では 0 に近づき、予想通りの結果を示した。以上の結果が示すように、GPT/CSR は広いエネルギー領域で有効である。

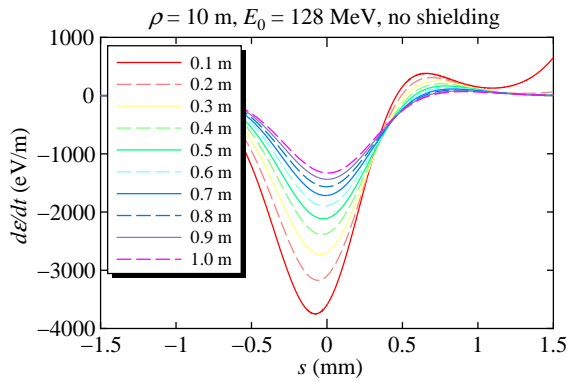


図 35: 遮蔽なしの場合の偏向電磁石出口以降の CSR wake の変化。初期のパンチ長は、0.3 mm。

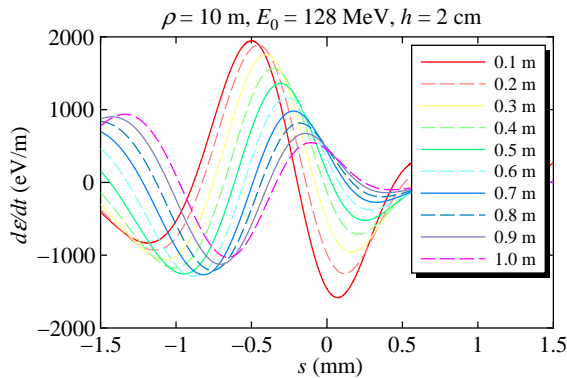


図 36: 遮蔽ありの場合の偏向電磁石出口以降の CSR wake の変化。真空チャンバーの高さは 2 cm。

### 8.2.4 過渡状態での CSR wake

偏向電磁石の入口や出口直後の過渡状態にある CSR の影響の計算結果を示すために、偏向電磁石出口から自由空間を進むビームについて、GPT/CSR を用いて CSR wake 関数の変化を計算した。計算では、ビームエネルギー 128 MeV、初期のパンチ長 0.3 mm、パンチ内の電荷  $-80$  pC とした。また、初期の粒子分布は進行方向、横方向とも Gaussian 分布とした。図 35 は遮蔽効果のない場合、図 36 は遮蔽効果のある場合の過渡状態の CSR wake の計算結果を示す。図 36 では、真空チャンバーの高さを 2 cm、鏡像電荷の数を 32 とした。計算では、半径  $\rho = 10$  m をもつ偏向電磁石の出口を  $\Delta s = 0$  m とし、この点で CSR は安定状態にあるとし、そこから自由空間を進むうちにどのように CSR wake が変化するかを求めた。図 35、36 が示すように、CSR wake は出口から離れると減少していく。

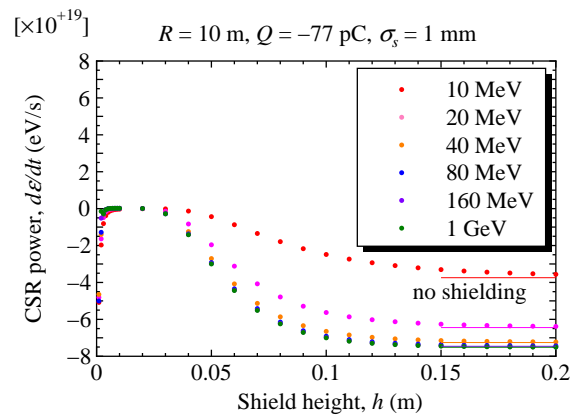


図 37: CSR によるエネルギー損失に対する遮蔽の高さの影響。CSR は安定状態。鏡像電荷の数は 32。

### 8.2.5 真空チャンバーによる CSR の遮蔽

GPT/CSR を用いて、CSR の遮蔽を  $\rho = 10$  m の円形軌道上で計算した。この計算では、CSR は安定状態にあるとした。図 37 は、エネルギー損失の真空チャンバーの高さに対する依存性を示す。計算では、パンチ長を 1.0 mm、パンチ内の電荷を  $-77$  pC、鏡像電荷の数を 32 とした。また、初期粒子分布は、進行方向、横方向ともに Gaussian 分布とした。図 37 の中での直線は、式 (8.11) から計算された遮蔽なしの場合の解析値を示す。遮蔽の高さが増加するに従い、エネルギー損失が解析値に近づくことがわかる。

### 8.2.6 合流部での CSR の影響

GPT/CSR を使った計算例として、コーネル大学 ERL 計画の合流部での CSR によるエミッタンス増大を計算し、elegant による計算結果と比較した。計算では、ビームの運動量を、(a)  $p_0 = 10$  MeV/c、(b)  $p_0 = 500$  MeV/c とした。また、CSR による効果のみを見るために、空間電荷効果は取り入れていない。図 11 に合流部のレイアウトを示す。合流部には、偏向電磁石 3 台の他に 4 極電磁石 2 台が配置され B3 の出口では分散関数が 0 になるように強さが調整される。また、2 つの運動量に対して同じビーム光学関数を与えるように、エネルギーによってスケールされる。図 38 に水平方向の RMS ビームサイズの変化を、図 39 に水平方向規格化 RMS エミッタンスの変化を示す。これらの図では、横軸は合流部入口からの進行方向の距離を表す。計算では、パンチ長を 0.3 mm、パンチ内の電荷を  $-80$  pC、初期粒子分布を Gaussian 分布とした。図 38、39 よ



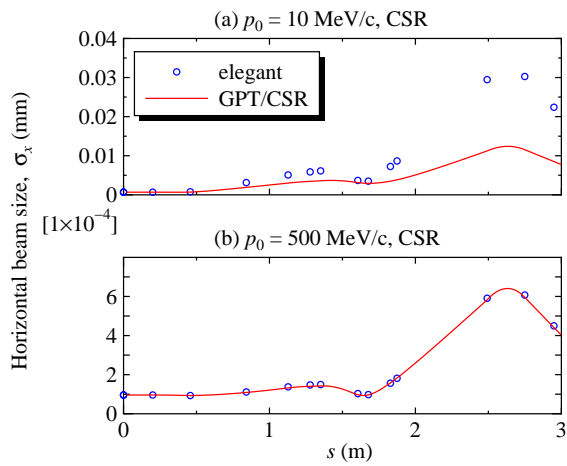


図 38: 合流部 (図 11) での CSR による水平方向 RMS ビームサイズの変化。

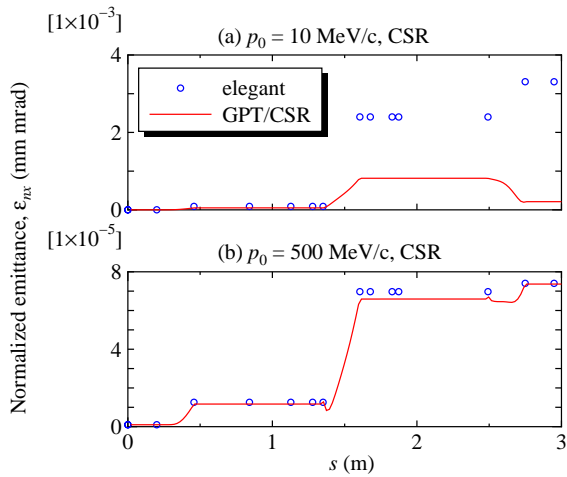


図 39: 合流部 (図 11) での CSR による規格化水平方向 RMS エミッタンスの変化。

り、(a)  $p_0 = 10 \text{ MeV/c}$  のエネルギーが低い場合は、elegant と GPT/CSR の結果で違いが見られた。これは、elegant の CSR 計算が超相対論的な近似を含むため、低エネルギー領域で有効でないことに起因すると推測される。一方、(b)  $p_0 = 500 \text{ MeV/c}$  の超相対論的な近似が成り立つ場合には、2つのコードによる計算結果は良い一致を示した。これらのことから、GPT/CSR は広いエネルギー範囲で有効であることが確認できた。

## 9 おわりに

本テキストでは、ERL 入射器でのビームダイナミクスについて、エミッタンスを増大させる物理を中心に紹介してきた。しかしながら、本テキストでの内容は筆者が知っている内容に限られており、偏りがあることは否めない。ここに掲載した参考文献以外にも良い文献が多数あるので、それらを参照して補っていただければ幸いである。

本テキストを書くにあたって、これまで当たり前のようによく考えて、自分で計算していないことについても改めて勉強する機会が得られた。しかしながら、筆者の知らないことはまだ数多くあり、また筆者の理解が誤っている可能性があることは否定できない。誤りに気がついた場合には、教えていただければ幸いである。本テキストの内容についてのコメント、ご質問を歓迎する。

e-mail:tsukasa@post.kek.jp

また、本テキストの基本構想では、実際の入射器の設計では欠かすことのできない、入射器パラメタの最適化法についても紹介する予定であったが、時間の都合で、本テキストでは割愛することにした。今後、本テキストの改訂版を OHO セミナーの web ページ上に公開する予定であるので、それに掲載できればと考えている。

## 参考文献

- [1] 羽島良一, 中村典雄, 坂中章悟, 小林幸則編集, コンパクト ERL の設計研究, KEK Report 2007-7, JAEA-Research 2008-032, 2008.
- [2] S. Y. Lee, Accelerator Physics, World Scientific, 1999.
- [3] H. Wiedemann, Particle Accelerator Physics, second edition, Springer, 1999.
- [4] M. Reiser, Theory and design of charged particle beams, Wiley & Sons, 1996.
- [5] J. D. Lawson, The physics of charged-particle beams, Oxford Press, 1988.
- [6] 町田慎二, OHO'2000, 空間電荷効果, 2000.
- [7] 栗木雅夫, OHO'2006, 粒子源の設計と現状, 2006. 栗木雅夫, OHO'2002, 電子源, 2002.
- [8] I. V. Bazarov, G. A. Krafft and L. Merminiga, USPAS course on Recirculated and Energy Recovered Linacs, [http://casa.jlab.org/publications/lecture\\_2005.shtml](http://casa.jlab.org/publications/lecture_2005.shtml), 2005.
- [9] Ivan V. Bazarov, Bruce M. Dunham, Yulin Li, Xianghong Liu, Dimitre G. Ouzounov, Charles K. Sinclair, Fay Hannon, and Tsukasa Miyajima, J. Appl. Phys. **103**, 054901 (2008).
- [10] Ivan V. Bazarov, Dimitre G. Ouzounov, Bruce M. Dunham, Sergey A. Belomestnykh, Yulin Li, Xianghong Liu, Robert E. Meller, John Sikora, Charles K. Sinclair, Frank W. Wise, Tsukasa Miyajima, Phys. Rev. ST Accel. Beams **11**, 040702 (2008).
- [11] I. V. Bazarov and C. K. Sinclair, Phys. Rev. ST Accel. Beams **8**, 034202 (2005).
- [12] V. N. Litvinenko, R. Hajima and D. Kayran, Nucl. Instr. Meth. A **557**, 165 (2006).
- [13] R. Hajima, Proc. of 1st Annual Meeting of Particle Accelerator Society of Japan and the 29th Linear Accelerator Meeting in Japan (August 4-6, 2004, Funabashi, Japan), 432 (2004).
- [14] R. Hajima, Jpn. J. Appl. Phys. **42**, L974 (2003).
- [15] A. W. Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerator, Wiley (1993).
- [16] 森田昭夫, OHO'2004, 初等ビーム力学からの Optics Correction 入門, 2004.
- [17] L. serafini and J. B. Rosenweig, Phys. Rev. E **55**, 7565 (1997).
- [18] S. G. Anderson and J. B. Rosenweig, Phys. Rev. STAB **3**, 094201 (2000).
- [19] B.E. Carlsten, Nucl. Instr. Meth. A **285**, 313 (1989).
- [20] C. Ronsivalle *et al.*, "Simulations of the Emittance Compensation in Photoinjectors and Comparison with SPARC Measurements", Proc. of EPAC2008, (2008).

- [21] M. Ferrario, "HOMDYN USER GUIDE", <https://projects.astec.ac.uk/Plone/astec/Software/HOMDYN/HOMDYN%20User%20Manual.pdf>.
- [22] K. Floetmann, ASTRA, [http://www.desy.de/~mpyfloASTRA\\_dokumentation](http://www.desy.de/~mpyfloASTRA_dokumentation).
- [23] L. M. Young, PARMELA, Los Alamos National Laboratory Report LA-UR-96-1835.
- [24] Pulsar Physics, <http://www.pulsar.nl/gpt/index.html>.
- [25] F. Ciocci *et al.*, Nucl. Instr. Meth. A **393**, 434 (1997).
- [26] A. Bacci *et al.*, Proceedings of PAC03, p. 3512
- [27] POISSON SUPERFISH, Los Alamos National Laboratory Report No. LA-UR-96-1834 (revision 14 March 2000).
- [28] H. Niederreiter, Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, SIAM Philadelphia (1992).
- [29] R. Hajima and R. Nagai, Nucl. Instr. Meth. A **557**, 103 (2006).
- [30] A. W. Chao and M. Tigner, Handbook of Accelerator Physics and Engineering, World Scientific, 2006.
- [31] D. Sagan, *Proceedings of EPAC06*, Edinburgh, Scotland, 2006, pp. 2829-2831.
- [32] I. V. Bazarov and T. Miyajima, "Calculation of Coherent Synchrotron Radiation in General Particle Tracer" Proc. of EPAC2008, (2008).
- [33] G. Bassi, *et al.*, Nucl. Instr. Meth. A **557**, 189 (2006).
- [34] D. Sagan, *Proceedings of EPAC06*, Edinburgh, Scotland, 2006, pp. 2829-2831.
- [35] M. Borland, Phys. Rev. ST-AB **4**, 070701 (2001).
- [36] L. Giannessi, P. Musumeci, and M. Quattromini, NIM A **436**, 443 (1999)
- [37] M. Dohlus, A. Kabel and T. Limberg, Nucl. Instr. Meth. A **445**, 338 (2000)
- [38] C. Mayes, private communication.
- [39] P. Emma and R. Brinkmann, *Proceedings of PAC97*, Vancouver, B.C., Canada, 1997, pp. 1679-1681.
- [40] Ya. S. Derbenev. *et al.*, TESLA FEL-Report 1995-05.